文章编号：1006－544X（2009）01－0106－04

应用 GRACE 卫星星历数据反演地球重力场模型

张兴福[1]，沈云中[2]

（1. 广东工业大学 测绘工程系，广州 510006；2. 同济大学 测量与国土信息工程系，上海 200092）

摘 要：讨论了基于 GRACE 卫星星历数据反演地球重力场模型的动力学法，给出了综合考虑估计加速度计尺度、偏差和卫星初始位置的算法。利用 26 天 GRACE 卫星精密轨道数据和加速度计数据解算出直到 36 阶次的地球重力场模型 GRACE01S_OR。采用不同模型位系数差的阶方差和不同模型所表示的大地水准面的差值的方法对该模型进行了外部检核。结果表明：该模型的精度优于相同阶次的 EGM96 模型和 EIGEN2 模型，而与同阶次的 CHAMP03S 和 CG01C 模型的精度非常接近。

关键词：动力学法；GRACE；尺度和偏差参数；初始位置误差；重力场模型

中图分类号：P223 **文献标志码**：A

0 引 言

应用卫星跟踪卫星技术（SST）反演地球重力场模型已经成为当今大地测量学界的研究热点之一，该方法主要是把低轨卫星作为地球重力场的传感器，通过跟踪卫星获得的观测量来反演地球重力场模型。卫卫跟踪技术可分为高低卫卫跟踪（hl－SST）和低低卫卫跟踪（ll－SST）两种跟踪模式，CHAMP 卫星和 GRACE 卫星是以上两种跟踪方式的代表。在 CHAMP 卫星和 GRACE 卫星发射之前，影响地球重力场模型精度的主要因素为缺乏基准统一并覆盖全球的观测数据。而卫卫跟踪技术恰恰可以弥补以上缺点，其优越性主要表现在：星载 GPS 接收机能提供基准统一、高覆盖率、高精度的全球框架下的卫星坐标；星载加速度计能提供高精度的非保守力摄动加速度，除此之外 GRACE 卫星星间测距系统能提供高精度的星间距离以及相应的衍生观测量——距离变率和距离加速度，这些观测量精度更高，对地球重力场信息的探测更敏感。

目前利用卫卫跟踪技术反演地球重力场模型的方法主要有动力学法[1－6]、能量法和加速度法[7－8]。动力学法是比较经典、有效的地球重力场模型反演方法之一，可扩展为完全动力学法，即利用卫星的 GPS 跟踪数据和 K 波段观测数据联合求解卫星轨道坐标、地球重力场模型位系数以及其他相应的待估参数，如：钟差、大气阻力系数、加速度计数据的尺度和偏差等，完全动力学法所获得的地球重力场模型的精度最高，但计算相当复杂，对计算机硬件要求也很高，仅 GFZ 等少数研究机构能给出相应的计算结果。一般情况下，先利用成熟的定轨软件获得低轨卫星的精密星历，然后再利用所获得的低轨卫星的精密星历应用动力学法求解地球重力场模型。

基于动力学法，利用 26 天 GRACE 卫星星历及加速度计观测数据获得了一组 36 阶次的地球重力场模型 GRACE01S_OR，在计算过程中将加速度计的尺度和偏差参数以及卫星初始轨道当待求参数与重力场位系数一起求解。

1 原理与方法

根据卫星运动的相关力学理论，只要给定卫星初始时刻的状态向量 $\boldsymbol{y}(t_0)$ 以及作用在卫星上的各种摄动力，就可以唯一的确定任意 t 时刻的卫星运

收稿日期：2008－04－01

基金项目：国家自然科学基金资助项目（40474006）；地球空间环境与大地测量教育部重点实验室基金资助项目（06－01）

作者简介：张兴福（1977—），男，博士，研究方向：卫星重力、GPS 数据处理及软件开发，E-mail：xfzhang77@163.com。

动状态 $\boldsymbol{y}(t)$，其函数表达式为[1]：

$$\boldsymbol{y}(t) = f(t, \boldsymbol{y}(t_0), \boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{p})。\tag{1}$$

其中：$\boldsymbol{p}$ 为各种待估参数向量，包括地球重力场模型位系数、加速度计数据的尺度和偏差参数等；$\boldsymbol{a}(t)$ 为日月引力、固体潮、海潮、大气潮、极潮和相对论等可用模型计算的保守力；$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ \dot{r}(t) \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}(t_0) = \begin{pmatrix} r(t_0) \\ \dot{r}(t_0) \end{pmatrix}$。

如果将 t 时刻卫星的状态向量 $\boldsymbol{p}$ 以参数向量的近似值 $\boldsymbol{p}_0$ 展开，并且考虑卫星初始状态向量误差的影响，则卫星在 t 时刻的状态向量可表示为

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_0(t) + \frac{\partial \boldsymbol{y}(t)}{\partial \boldsymbol{p}_0^{\mathrm{T}}}\delta \boldsymbol{p} + \frac{\partial \boldsymbol{y}(t)}{\partial \boldsymbol{y}(t_0)^{\mathrm{T}}}\delta \boldsymbol{q}。\tag{2}$$

其中：$\boldsymbol{y}_0(t)$ 为 t 时刻卫星状态向量的近似值；$\delta \boldsymbol{p}$ 为待估参数向量的改正数；$\delta \boldsymbol{q}$ 为对卫星初始状态向量 $\boldsymbol{y}(t_0)$ 的改正数。

如果仅将 t 时刻的卫星位置当作观测量建立与地球重力场模型位系数、卫星所受到的其他摄动力以及卫星初始状态向量参数之间的关系，则公式可表示为

$$\Delta \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{S}(t)\delta \boldsymbol{p} + \boldsymbol{\Phi}(t)\delta \boldsymbol{q}。\tag{3}$$

其中：$\boldsymbol{S}(t)$ 为参数敏感矩阵，$\boldsymbol{S}(t) = \frac{\partial \boldsymbol{y}(t)}{\partial \boldsymbol{p}_0^{\mathrm{T}}}\Big|_{r(t)=r_0(t)}$；$\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{u} \quad \boldsymbol{v}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 分别为地球重力场模型位系数参数和加速度数据的尺度和偏差参数；$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 为状态转移矩阵；$\Delta \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{r}_0(t)$，即低轨卫星的精密轨道与积分获得的参考轨道的差值。

若令 $\boldsymbol{Y}(t) = [\boldsymbol{S}(t) \quad \boldsymbol{\Phi}(t)]$，$\boldsymbol{x} = [\delta \boldsymbol{p} \quad \delta \boldsymbol{q}]^{\mathrm{T}}$，则式(3) 可写为

$$\Delta \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{Y}(t)\boldsymbol{x}。\tag{4}$$

由于将加速度数据的尺度和偏差以及卫星初始状态向量当待求参数，则求解式(4) 中 $\boldsymbol{Y}(t)$ 的变分方程应为

$$\ddot{\boldsymbol{Y}}(t) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{r}_0^{\mathrm{T}}(t)}\right)\boldsymbol{Y}(t) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_0^{\mathrm{T}}(t)}\right)\dot{\boldsymbol{Y}}(t) + \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{P}_0^{\mathrm{T}}} \quad \boldsymbol{0}\right]。\tag{5}$$

其中，$\boldsymbol{f}$ 为卫星所受到的各种力的和，由于各保守力对卫星速度的导数为零，而非保守力由加速度计提供，因此 $\partial \boldsymbol{f} / \partial \dot{\boldsymbol{r}}_0^{\mathrm{T}}(t) = \boldsymbol{0}$。

若令 $\boldsymbol{H}(t) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{r}_0^{\mathrm{T}}(t)}$，$\boldsymbol{C}(t) = \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{P}_0^{\mathrm{T}}} \quad \boldsymbol{0}\right]$，则式(5) 可写为

$$\ddot{\boldsymbol{Y}}(t) = \boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{Y}(t) + \boldsymbol{C}(t)。\tag{6}$$

上式中的最后一项可以写为 $\boldsymbol{C}(t) = \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}_0^{\mathrm{T}}} \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}}} \quad \boldsymbol{0}\right]$，$\boldsymbol{H}(t)$ 和 $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{u}_0^{\mathrm{T}}}$ 的计算方法可参照文献[1]，$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}}}$ 可由 GRACE 卫星科学坐标系(SRF) 下加速度测量值的标校公式导出

$$F_i = S_i F_{i0} + B_i。\tag{7}$$

其中：S_i 为尺度参数，B_i 为偏差参数，计算参考轨道时其值采用 GFZ 数据中心提供的推荐值，其结果见表1 和表2。F_{i0} 为加速度观测值，F_i 为标校后的加速度值，$i = x, y, z$，则

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}_0^{\mathrm{T}}} = \boldsymbol{R}\begin{bmatrix} F_{x0} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & F_{y0} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & F_{z0} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。\tag{8}$$

其中，$\boldsymbol{R}$ 为将加速度数据转换到惯性系的旋转矩阵，由姿态数据直接计算。

表 1　推荐的 GRACE 卫星尺度参数

Table 1　Propositional scale parameters for GRACE A and B

Direction(SRF)	GRACE - A	GRACE - B	Uncertainty
x	0.961	0.947	±0.002
y	0.98	0.97	±0.02
z	0.94	0.92	±0.02

表 2　推荐的 GRACE 卫星偏差参数

Table 2　Propositional bias parameters for GRACE A and B

Direction (SRF)	Bias Model	
	GRACE - A	GRACE - B
x	$-1020 - 0.24(Td - 52365)$; $Td < 52706$ $-1110 - 0.08(Td - 52700)$; $Td \geqslant 52706$	$-520 - 0.08(Td - 52400)$
y	$26000 + 5.0(Td - 52400)$; $Td < 52706$ $27800 + 1.7(Td - 52700)$; $Td \geqslant 52706$	$5940 + 10.5(Td - 52400) - 0.01(Td - 52400)^2$
z	-500	-775

注：偏差参数单位为 $\mathrm{nm/s^2}$，Td 为简化儒略日(the Modified Julian Date)。

由于初始历元卫星的位置与力模型参数无关，则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{Y}(t_0) \\ \dot{\boldsymbol{Y}}(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{I} \end{vmatrix}。 \tag{9}$$

其中：$\boldsymbol{I}$ 为 3 × 3 单位阵，即 $\boldsymbol{\Phi}(t_0, t_0) = \boldsymbol{I}_{6\times6}$。

由于考虑了加速度数据尺度和偏差参数的重新标定以及卫星初始状态向量的误差，因此有必要在每一个弧段结束后，将与位系数无关的局部参数（加速度数据的尺度和偏差以及卫星初始位置改正数）消去，只保留与重力场位系数有关的法方程，对于每一颗 GRACE 卫星，其具体实现过程如下：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{uu} & \boldsymbol{N}_{uz} \\ \boldsymbol{N}_{zu} & \boldsymbol{N}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{u} \\ \delta\boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{l}_u \\ \boldsymbol{l}_z \end{bmatrix}。 \tag{10}$$

其中，$\boldsymbol{u}$ 为位系数参数向量，$\boldsymbol{z}$ 为加速度尺度和偏差以及卫星初始位置参数向量，$\boldsymbol{N}_{uu}$ 为求解位系数参数法方程块，$\boldsymbol{N}_{zz}$ 为求解尺度和偏差以及卫星初始位置参数法方程块，$\boldsymbol{N}_{zu}$ 和 $\boldsymbol{N}_{zz}$ 为两类参数联系法方程块，$\boldsymbol{l}_u$ 和 $\boldsymbol{l}_z$ 为相应的常数项，将上式中的尺度和偏差以及初始位置参数消去，可得到求解位系数的法方程：

$$(\boldsymbol{N}_{uu} - \boldsymbol{N}_{uz}\boldsymbol{N}_{zz}^{-1}\boldsymbol{N}_{zu})\delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{l}_u - \boldsymbol{N}_{uz}\boldsymbol{N}_{zz}^{-1}\boldsymbol{l}_z。 \tag{11}$$

对于每颗 GRACE 卫星都可利用式(11)得到每一个弧段内与位系数有关的法方程，然后将该弧段内由两颗 GRACE 卫星星历数据所得到的法方程进行叠加，最后累加每个弧段的法方程就可得到求解位系数的总法方程。

2 反演结果与分析

利用 JPL 和 GFZ 数据中心提供的 2002 年 7 月中的 26 天 GRACE 卫星精密星历数据和加速度数据解算出 36 阶次的地球重力场模型 GRACE01S_OR（“OR”表示由 GRACE 卫星精密星历得到的地球重力场模型），在计算过程中保守力除地球引力外还考虑了日月引力（DE405）、固体潮汐（IERS96，采用 2 阶）、海潮（CSR3.0，采用 2 阶）、大气潮（IERS96，只考虑对 C_{21} 和 S_{21} 的影响）、极潮（IERS C04，只考虑对 C_{21} 和 S_{21} 的影响）和相对论影响。采用的参考重力场模型为 EGM96，阶次为 120 阶，为了防止高阶位系数误差对解算低阶位系数的影响，将 EGM96 模型的 37 ~ 120 阶位系数用 CG01C 模型位系数代替。考虑到卫星的非模型化误差以及观测方程线性化误差的影响，每一小时为一个计算弧段，加速度计参数和轨道参数的估计频率与之相同，精密轨道数据的采样率为 60 s，积分步长为 10 s。

采用不同地球重力场模型位系数差的阶方差对所恢复的地球重力场模型精度进行评定，基准模型选择由 GFZ 提供的完全至 360 阶次的 EIGEN - CG01C 模型，该模型是由 CHAMP 和 GRACE 卫星观测数据以及地面重力数据联合解算得到的，并选择 EIGEN2 模型（由 6 个月 CHAMP 卫星观测数据解算得到）和 CHAMP03S（由 33 个月 CHAMP 卫星观测数据解算得到）以及 EGM96 模型作为比较模型，图 1 为不同重力场模型位系数差的阶方差，图 2 为不同模型所表示的大地水准面差值，即比较模型所表示的大地水准面与基准模型的差值，为了更清楚的表示它们之间的差异，将 CHAMP03S 和 EIGEN2 模型与 CG01C 模型大地水准面差值分别向上（CHAMP03S + 60 cm）和向下（EIGEN2 - 60 cm）平移

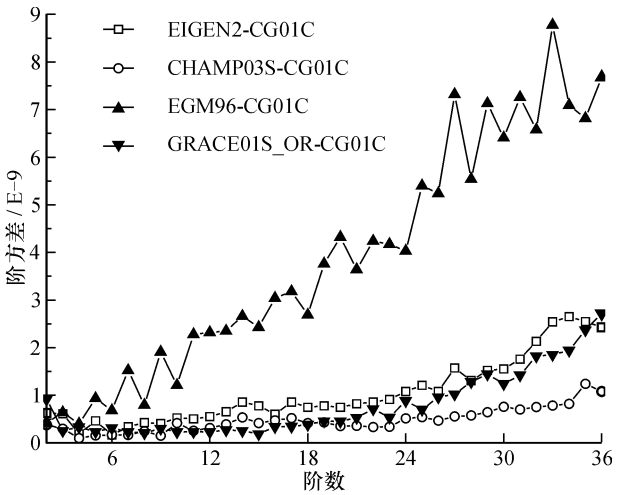


图 1 与 CG01C 模型位系数差的阶方差

Fig. 1 Difference degree with CG01C model

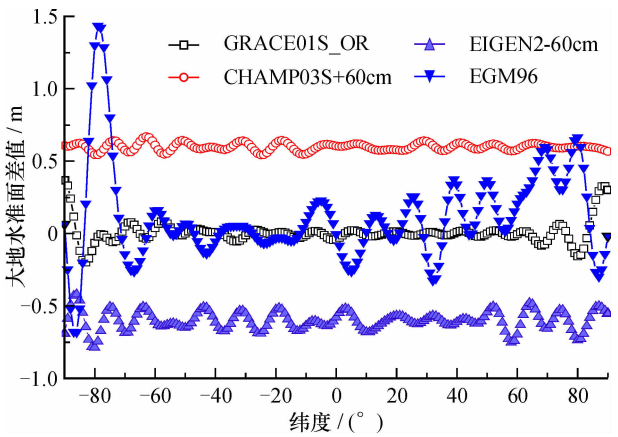


图 2 与 CG01C 模型大地水准面差值

Fig. 2 Geoid difference with CG01C model

60 cm，其他大地水准面差值保持不变。表 3 给出了在纬度 -70° ~ 70°区域内，不同模型所表示的大地水准面差值的统计结果。

图 1 表明：EGM96 模型位系数与 CG01C 模型位系数的差别最大，而本文所获得的重力场模型 GRACE01S_OR 前 20 阶位系数与 CHAMP03S 模型位系数非常相近，总体上 GRACE01S_OR 模型比 EIGEN2 模型更接近 CG01C 模型。

图 2 和表 3 显示：EGM96 模型与 CG01C 模型所表示的大地水准面差异最大，这与图 1 的结果是一致的。在纬度 -70° ~ 70°区域内，GRACE01S_OR 和 CHAMP03S 模型所表示的大地水准面与 CG01C 模型最为接近，差值的标准差分别为 0.028 和 0.026 m，说明三者在该频段模型精度相当，而 EIGEN2 模型与之差异要大一些，EGM96 模型所表现的差异最大。在两极区域，GRACE01S_OR 模型与 CG01C 模型所表示的大地水准面差异相对其他两个模型（除 EGM96 模型）要大一些，其主要原因是本文采用的数据覆盖率偏低有关，仅有 26 天 GRACE 卫星观测数据。

表 3　各模型与 CG01C 模型大地水准面差值的统计结果

Table 3　Statistical results of geoid differences from models GRACE01S_OR, EGM96 CHAMP03S, EIGEN2 and CG01C

重力场模型	最小值/m	最大值/m	平均值/m	标准差/m
GRACE01S_OR	-0.082	0.085	0.000	0.028
CHAMP03S	-0.056	0.071	0.000	0.026
EIGEN2	-0.152	0.121	-0.002	0.055
EGM96	-0.325	0.598	0.055	0.187

3　结束语

GRACE01S_OR 是仅利用 26 天 GRACE 卫星精密轨道数据和加速度数据获得的 36 阶地球重力场模型，该模型采用 EGM96 为参考重力场模型，检核结果表明：在纬度 -70° ~ 70°区域内，该模型比相同阶次的 EIGEN2 模型更接近 CG01C 模型，说明了 GRACE 卫星星历和加速度计等观测数据精度高且能明显改善地球重力场模型低阶位系数的精度。

致谢：感谢 JPL 和 GFZ 提供 GRACE 卫星精密轨道数据和加速度计数据。

参考文献：

[1] 张兴福，沈云中. 应用卫卫跟踪数据恢复地球重力场模型的模拟分析[J]. 同济大学学报：自然科学版，2005，33(10)：1410 - 1413.

[2] 张兴福，沈云中，胡雷鸣. 基于 CHAMP 短弧长动力学轨道的地球重力场模型[J]. 地球物理学报，2007，50(1)：0106 - 0110.

[3] 张兴福，沈云中，胡雷鸣. 卫星重力测量数据处理软件系统的设计[J]. 测绘科学技术学报，2006，23(6)：393 - 395.

[4] Reigber C, Schwintzer P, Neumayer KH, et al. The CHAMP-only earth gravity field model EIGEN - 2[J]. Adv. Space Res., 2003, 31(8): 1883 - 1888.

[5] Reigber C, Balmino G, Schwintzer P, et al. A high quality global gravity field model from CHAMP GPS tracking data and accelerometry (EIGEN-1S)[J]. Geophys. Res. Lett., 2002, 29(14): 371 - 374.

[6] Mayer Guürr T, Ilk K H, Eicker A. ITG-CHAMP01: a CHAMP gravity field model from short kinematic arcs over a one-year observation period[J]. Journal of Geodesy, 2005, 78: 462 - 480.

[7] Visser P N A M, Sneeuw N, Gerlach C. Energy integral method for gravity field determination from satellite orbit coordinates [J]. Journal of Geodesy, 2003, 77: 207 - 216.

[8] Han S C, Jekeli C, Shum C K. Efficient gravity field recovery using in situ disturbing potential observables from CHAMP[J]. Geophys . Res. Lett., 2002, 29(16): 1789 - 1794.

Gravity Field Model Recovery Based on GRACE Ephemerides

ZHANG Xing-fu[1], SHEN Yun-zhong[2]

(1. *Department of Surveying and Mapping, Guangdong University of Technology, Guangzhou* 510006, *China*;
2. *Department of Surveying and Geo-Informatics, Tongji University, Shanghai* 200092, *China*)

Abstract: The dynamic method for recovering gravity field model based on GRACE ephemerides is discussed, and the algorithm is put forward according to accelerometer scale and bias, the influences of initial state vector errors. The gravity field model GRACE01S_OR up to degree and order 36 are recovered from 26-day GRACE data, including dynamical orbits and accelerometer data. The degree variances and geoid differences from different models are adopted for validating the accuracy of GRACE01S_OR model. The results show that the model GRACE01S_OR is more accurate than EGM96 and EIGEN2 model truncated to the same degree and order, and has almost the same accuracy as CHAMP03S and CG01C model.

Key words: dynamic method; GRACE; scale and bias parameters; initial state vector errors; gravity field model