文章编号: 1674 - 9057(2018)01 - 0150 - 05

doi:10. 3969/j. issn. 1674 - 9057. 2018. 01. 022

强混合序列加权和及部分和之和乘积的几乎处处中心极限定理的推广

郝晓春, 吴群英

(桂林理工大学 理学院, 广西 桂林 541004)

摘要: 设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 为同分布的强混合正随机变量序列, 利用混合序列加权和的中心极限定理及矩不等式, 获得了权重为 $d_k = k^{-1} \exp\{\ln^\alpha k\}$ ($0 \leq \alpha < 1/2$) 的强混合序列加权和及部分和之和乘积的几乎处处中心极限定理。

关键词: 强混合序列; 部分和之和乘积; 几乎处处中心极限定理

中图分类号: O211.4

文献标志码: A

1 引言及主要结果

目前, 对各种混合序列极限性质的研究已取得较大的发展, 金敬森^[1]给出了强混合序列部分和乘积的几乎处处中心极限定理, 冯凤香等^[2]改进了金敬森的结果, 付艳莉等^[3]给出了强混合序列部分和之和乘积的几乎处处中心极限定理, 本文推广了文献 [3] 关于强混合序列部分和之和乘积的几乎处处中心极限定理。

定义 1 设 S, T 是概率空间上的任意两个 σ 代数, 令

$$\alpha(S, T) = \sup_{(A, B) \in S \times T} |P(A \cap B) - P(A)P(B)|,$$

又记混合系数 $\alpha(n) = \sup_{k \geq 1} \alpha(F_1^k, F_{k+n}^\infty)$, 其中, $F_a^b = \sigma(X_i, a \leq i \leq b)$ 。如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0$, 则称 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为强混合序列。

本文中, $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 为一同分布的正强混合序列, $EX = \mu > 0, \text{var } X = \sigma^2 < \infty$ 。当 $1 \leq k \leq n$ 时, 记 $b_{k,n} = \sum_{i=k}^n \frac{1}{i}, c_{k,n} = \sum_{i=k}^n \frac{2(i+1-k)}{i(i+1)}$; 当 $k > n$ 时, 记 $b_{k,n} = c_{k,n} = 0$ 。再记 $Y_k = \frac{X_k - \mu}{\sigma}, U_n = \sum_{k=1}^n Y_k, S_{n,n} = \sum_{k=1}^n c_{k,n} Y_k, n \geq 1, \sigma_n^2 = \text{var}(S_{n,n})$ 。设 c 为一正常数, 在不同之处可以取不同的值, 记 $a_n \sim b_n$ 表示 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$ 。“ $a_n \ll b_n$ ”表示存在一正常数 c 使得 $a_n \leq cb_n$; “ $\xrightarrow{d}$ ”表示依分布收敛; $I\{\cdot\}$ 表示示性函数; $\mathcal{N}$ 表示标准正态随机变量; $\Phi(\cdot)$ 表示 $\mathcal{N}$ 的分布函数。本文的结果如下:

定理 1 设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 是同分布的强混合正随机变量序列, 满足 $EX = \mu > 0, \text{var } X = \sigma^2 < \infty$, 记 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i, d_k = k^{-1} \exp\{\ln^\alpha k\} (0 \leq \alpha < \frac{1}{2}); D_n = \sum_{k=1}^n d_k$, 变异系数 $\gamma = \frac{\sigma}{\mu}$, 并且假设下列条件成立:

- 1) 对于某一 $\delta > 0$, 有 $E|X|^{2+\delta} < \infty$;
- 2) 对某一 $r > 1 + 2/\delta$, 有 $\alpha(n) = O(n^{-r})$;

收稿日期: 2016 - 04 - 01

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11661029); 广西自然科学基金项目 (2015GXNSFAA139008)

作者简介: 郝晓春 (1991—), 男, 硕士, 研究方向: 概率极限理论, 1026803110@qq.com。

通讯作者: 吴群英, 博士, 教授, wqy666@glut.edu.cn。

引文格式: 郝晓春, 吴群英. 强混合序列加权和及部分和之和乘积的几乎处处中心极限定理的推广 [J]. 桂林理工大学学报, 2018, 38 (1): 150 - 154.

3) $\inf_{n \in \mathbf{N}} \sigma_n^2/n > 0$.

则对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 有
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k I \left\{ \frac{S_{k,k}}{\sigma_k} \leq x \right\} = \Phi(x), \text{ a. s. } \circ \quad (1)$$

定理 2 在定理 1 的条件下, 且设 $B_n^2 = \text{var } S_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n^2}{n} = \sigma_1^2 > 0$, 又记 $Q_n = \sum_{i=1}^n S_i$, 则对 $\forall x \in \mathbf{R}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k I \left\{ \left(\prod_{i=1}^k \frac{Q_i}{i(i+1)(\mu/2)^k} \right)^{1/(\gamma\sigma_1)} \leq x \right\} = F(x), \text{ a. s. }, \quad (2)$$

其中, $F(x)$ 是随机变量 $e^{\mathcal{N}}$ 的分布函数.

2 定理的证明

引理 1^[4] 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是均值为零的强混合序列, 对某个 $\delta > 0$, 有 $\sup_n \mathbb{E} |X_n|^{2+\delta} < \infty$, 则存在一仅依赖 δ 的常数 $c(\delta)$, 使得

$$\sup_{j \geq 1} \sum_{i=j+1}^{n+j} |\text{cov}(X_i, X_j)| \leq c(\delta) \left[\sum_{i=1}^n i^{2/\delta} \alpha(i) \right]^{\delta/(\delta+2)} \sup_k \|X_k\|_{2+\delta}^2,$$

其中, $\|X_k\|_p = (\mathbb{E} |X_k|^p)^{1/p}$, $p > 1$.

引理 2^[4] 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是均值为零的强混合序列, $\{a_{k,n}, 1 \leq k \leq n\}$ 是一实值三角组列. 假设

1) $\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n a_{k,n}^2 < \infty$, $\max_{1 \leq k \leq n} |a_{k,n}| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$;

2) 对某个 $\delta > 0$, $\{|X_k|^{2+\delta}\}$ 是一致可积的, $\inf_k \text{var}(X_k) > 0$, $\text{var}[\sum_{k=1}^n a_{k,n} X_k] = 1$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2/\delta} \alpha(n) < \infty$, 则有

$$\sum_{k=1}^n a_{k,n} X_k \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), n \rightarrow \infty \circ$$

引理 3^[5] 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是均值为零的强混合序列, 对某个 $\delta > 0$, 有 $\sup_n \mathbb{E} |X_n|^{2+\delta} < \infty$, 假设对某 $r > 1 + 2/\delta$, 有 $\alpha(n) = O(n^{-r})$, 且 $\inf_{n \in \mathbf{N}} B_n^2/n > 0$, 其中 $B_n^2 = \text{var } S_n$, 则

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2\sigma_1^2 n \ln n}} = 1, \text{ a. s. } \circ$$

引理 4^[6] $\sum_{k=1}^n b_{k,n}^2 = 2n - b_{1,n}$, $\sum_{k=1}^n c_{k,n}^2 = \frac{10}{3}n - 4b_{1,n} + \frac{10n}{3(n+1)}$.

2.1 定理 1 的证明

记 $a_{k,n} = \frac{c_{k,n}}{\sigma_n}$, $1 \leq k \leq n, n \geq 1$, 由 $c_{k,n} \leq 2b_{k,n}$, 引理 4 及条件 3) 得

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n a_{k,n}^2 = \sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n \frac{c_{k,n}^2}{\sigma_n^2} \leq c \sup_n \frac{1}{n} \left(\frac{10n}{3} - 4b_{1,n} + \frac{10n}{3(n+1)} \right) = \frac{10c}{3} < \infty.$$

$$\max_{1 \leq k \leq n} |a_{k,n}| = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{c_{k,n}}{\sigma_n} \leq \frac{2b_{1,n}}{\sigma_n} \leq \frac{C \ln n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \circ$$

由强混合的定义知 $\{Y_k, k \geq 1\}$ 仍为同分布的强混合序列, 且 $\mathbb{E} Y_1 = 0$, $\mathbb{E} Y_1^2 = 1$, 所以有 $\inf_k \text{var}(Y_k)$

$= \mathbb{E} Y_1^2 = 1 > 0$, 且 $\text{var}(\sum_{k=1}^n a_{k,n} Y_k) = \text{var} \frac{\sum_{k=1}^n c_{k,n} Y_k}{\sigma_n} = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2} = 1$; 由条件 2) 中 $r - \frac{2}{\delta} > 1$, 可得 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2/\delta} \alpha(n)$

$\ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(r-2/\delta)} < \infty$; 又由 $\{Y_k, k \geq 1\}$ 的同分布性及条件 1), 可知 $\{|Y_k|^{2+\delta}\}$ 是一致可积的. 注意到

$\sum_{k=1}^n a_{k,n} Y_k = \sum_{k=1}^n \frac{c_{k,n} Y_k}{\sigma_n} = \frac{S_{k,k}}{\sigma_k}$, 因此 $\frac{S_{k,k}}{\sigma_k}$ 满足引理 2 的条件, 所以有

$$\frac{S_{k,k}}{\sigma_k} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), k \rightarrow \infty. \quad (3)$$

设 $f(x)$ 是有界的 Lipschitz 函数, 且其导函数有界, 则由式(3)知

$$E f\left(\frac{S_{k,k}}{\sigma_k}\right) \rightarrow E f(\mathcal{N}(0, 1)), n \rightarrow \infty.$$

又由 Toeplitz 引理得

$$\frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k E f\left(\frac{S_{k,k}}{\sigma_k}\right) \rightarrow E f(\mathcal{N}(0, 1)), n \rightarrow \infty.$$

另一方面, 由文献[7]中第2部分和文献[8]中定理7.1知, 式(3)等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k E f\left(\frac{S_{k,k}}{\sigma_k}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\Phi(x) = E f(\mathcal{N}(0, 1)). \quad (4)$$

综上, 要证明式(1), 只需证明

$$T_n = \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k \left[f\left(\frac{S_{k,k}}{\sigma_k}\right) - E f\left(\frac{S_{k,k}}{\sigma_k}\right) \right] \rightarrow 0, \text{ a. s. }, n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

记 $\xi_k = f\left(\frac{S_{k,k}}{\sigma_k}\right) - E f\left(\frac{S_{k,k}}{\sigma_k}\right)$, $1 \leq k \leq n$, 则 $T_n = \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k \xi_k$, 即式(4)等价于 $T_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$. 当 $l > 2k$, 由 $S_{n,n}$ 的定义, 有

$$\begin{aligned} S_{l,l} - S_{2k,2k} &= (c_{1,l}Y_1 + c_{2,l}Y_2 + \cdots + c_{l,l}Y_l) - (c_{1,2k}Y_1 + c_{2,2k}Y_2 + \cdots + c_{2k,2k}Y_{2k}) \\ &= c_{2k+1,l}U_{2k} + \sum_{i=2k+1}^l c_{2k+1,i}Y_i. \end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned} |E \xi_k \xi_l| &= \left| \text{cov}\left(f\left(\frac{S_{k,k}}{\sigma_k}\right), f\left(\frac{S_{l,l}}{\sigma_l}\right)\right) \right| \leq \left| \text{cov}\left[f\left(\frac{S_{k,k}}{\sigma_k}\right), f\left(\frac{S_{l,l}}{\sigma_l}\right) - f\left(\frac{S_{l,l} - S_{2k,2k} - c_{2k+1,l}U_{2k}}{\sigma_l}\right)\right] \right| + \\ &\quad \left| \text{cov}\left[f\left(\frac{S_{k,k}}{\sigma_k}\right), f\left(\frac{S_{l,l} - S_{2k,2k} - c_{2k+1,l}U_{2k}}{\sigma_l}\right)\right] \right| \triangleq M_1 + M_2. \end{aligned} \quad (6)$$

根据引理1和引理4, 以及条件1)和2), 有

$$\begin{aligned} \text{var}(S_{2k,2k}) &= \sum_{i=1}^{2k} c_{i,2k}^2 E Y_i^2 + 2 \sum_{j=1}^{2k-1} \sum_{i=j+1}^{2k} c_{i,2k} c_{j,2k} \text{cov}(Y_i, Y_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^{2k} c_{i,2k}^2 + \sum_{j=1}^{2k-1} c_{j,2k}^2 \sum_{i=j+1}^{2k} |\text{cov}(Y_i, Y_j)| \\ &\ll \left[\frac{20k}{3} - 4b_{1,2k} + \frac{20k}{3(2k+1)} \right] + \sum_{j=1}^{2k-1} c_{j,2k}^2 \sum_{i=j+1}^{k+j+1} |\text{cov}(Y_i, Y_j)| \\ &\ll \left[\frac{20k}{3} - 4b_{1,2k} + \frac{20k}{3(2k+1)} \right] + \sum_{j=1}^{2k-1} c_{j,2k}^2 \left[\sum_{i=j+1}^{k+j+1} i^{(2/\delta-r)} \right]^{\delta/(2+\delta)} \\ &\ll \left[\frac{20k}{3} - 4b_{1,2k} + \frac{20k}{3(2k+1)} \right] \ll k. \end{aligned} \quad (7)$$

同理得, $\text{var}(U_{2k}) \ll k$.

由 f 是有界的 Lipschitz 函数, 利用 Hölder 不等式及条件3), 根据式(7), 对 $0 < \varepsilon < 1/2$, 有

$$\begin{aligned} M_1 &\leq \sqrt{\frac{k}{l}} \left[1 + \ln \frac{l}{k} \right] c \frac{1}{\sigma_l} E |S_{2k,2k} + c_{2k+1,l}U_{2k}| \\ &\ll \frac{1}{\sigma} [\text{var}(S_{2k,2k})^{1/2} + c_{2k+1,l} \text{var}(U_{2k})^{1/2}] \leq \sqrt{\frac{k}{l}} \left[1 + \ln \frac{l}{k} \right] \leq \left(\frac{k}{l} \right)^{1/2-\varepsilon}. \end{aligned} \quad (8)$$

又由文献[5]中的强混合的协方差不等式和 f 的有界性, 可知

$$M_2 = \left| \text{cov}\left[f\left(\frac{S_{k,k}}{\sigma_k}\right), f\left(\frac{S_{l,l} - S_{2k,2k} - c_{2k+1,l}U_{2k}}{\sigma_l}\right)\right] \right| \ll \alpha(k). \quad (9)$$

由式(8)、式(9)知, $\exists \tau = \frac{1}{2} - \varepsilon > 0$, 使得 $|E \xi_k \xi_l| \leq \alpha(k) + \left(\frac{k}{l}\right)^\tau$.

$$\begin{aligned} E \left[\sum_{k=1}^n d_k \xi_k \right]^2 &\ll \sum_{1 \leq k < l \leq n} d_k d_l |E(\xi_k \xi_l)| + \sum_{k=1}^n d_k^2 E \xi_k^2 = \sum_{1 \leq k < l \leq n, l/k \geq (\ln D_n)^{2\tau}} d_k d_l |E(\xi_k \xi_l)| + \\ &\quad \sum_{1 \leq k < l \leq n, l/k < (\ln D_n)^{2\tau}} d_k d_l |E(\xi_k \xi_l)| + \sum_{k=1}^n d_k^2 E \xi_k^2 \triangleq T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} \end{aligned}$$

先估计 $T_{n,1}$,

$$\begin{aligned} T_{n,1} &\ll \sum_{1 \leq k < l \leq n, l/k \geq (\ln D_n)^{2/\tau}} d_k d_l \cdot [\alpha(k) + (l/k)^{-\tau}] \\ &\leq \sum_{k=1}^n d_k \sum_{l=1}^n d_l \cdot \frac{1}{((\ln D_n)^{2/\tau})^\tau} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \exp((\ln k)^\alpha) \alpha(k) \sum_{l=1}^n d_l \\ &\ll \frac{D_n^2}{(\ln D_n)^2} + D_n \exp((\ln n)^\alpha) \frac{1}{(\ln n)^{2/\delta}} \end{aligned}$$

再估计 $T_{n,2}$, 因为 $d_l = \frac{\exp(\ln^\alpha l)}{l} \sim \exp(\ln^\alpha l) \ln \frac{l+1}{l}$, 所以

$$T_{n,2} \leq \exp(\ln^\alpha n) \sum_{k=1}^n d_k \sum_{k < l \leq (\ln D_n)^{2/\tau}} (\ln(l+1) - \ln l) \ll \exp(\ln^\alpha n) \cdot D_n \cdot \ln \ln D_n.$$

然后估计 $T_{n,3}$, 因为 $E\xi_k^2 \leq 1$, $\exp(\ln^{2\alpha} k)$ 是关于 k 的慢变化函数, 所以

$$T_{n,3} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(\ln^{2\alpha} k)}{k^2} < \infty.$$

由文献[9]知, 对于 D_n , 当 $a = 0$ 时, $d_k = e/k$, $D_n \sim e \ln n$; 当 $0 < \alpha < 1/2$ 时, 有

$$\begin{aligned} D_n &\sim \int_1^n \frac{\exp(\ln^\alpha x)}{x} dx = \int_0^{\ln n} \exp(y^\alpha) dy \sim \int_0^{\ln n} \left(\exp(y^\alpha) + \frac{1-\alpha}{\alpha} y^{-\alpha} \exp(y^\alpha) \right) dy \\ &= \int_0^{\ln n} \frac{1}{\alpha} (y^{(1-\alpha)} \exp(y^\alpha))' dy = \frac{1}{\alpha} \ln^{(1-\alpha)} n \exp(\ln^\alpha n). \end{aligned} \tag{10}$$

因此, 当 $n \rightarrow \infty$ 有 $\ln D_n \sim \ln^\alpha n$. (11)

$$\exp\{\ln^\alpha n\} \sim \frac{\alpha D_n}{\ln^{(1-\alpha)/\alpha} D_n} \sim \frac{\alpha D_n}{\ln^{(1-\alpha)} n}. \tag{12}$$

由式(10) ~ (12)可知,

$$T_{n,1} \ll \frac{D_n^2}{(\ln D_n)^2} + \frac{D_n^2}{(\ln D_n)^{(1-\alpha)/\alpha + 2/(\alpha\delta)}}, T_{n,2} \ll D_n^2 (\ln D_n)^{(\alpha-1)/\alpha} \cdot \ln \ln D_n.$$

因此, 当 $\alpha \in [0, 1/2)$ 时, $(1-\alpha)/\alpha > 1$, $\forall \varepsilon > 0$ 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(|T_n| > \varepsilon) &\ll \sum_{n=1}^{\infty} E T_n^2 \ll \frac{1}{D_n^2} \sum_{n=1}^{\infty} E \left[\sum_{k=1}^n d_k \xi_k \right]^2 \\ &\ll \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(\ln D_n)^2} + \frac{1}{(\ln D_n)^{(1-\alpha)/\alpha + 2/(\alpha\delta)}} + \frac{\ln \ln D_n}{(\ln D_n)^{(1-\alpha)/\alpha}} \right] \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln D_n \cdot (\ln \ln D_n)^2}. \end{aligned}$$

下面用子序列法证明 $T_n \xrightarrow{a.s.} 0, n \rightarrow \infty$. 先证明 $\forall a > 1$, 取 $n_k = \inf\{n, D_n \geq a^k\}$, 则 $D_{n_k} \geq a^k, D_{n_{k-1}} < a^k$, 所以 $D_{n_k} \sim a^k$. 又由 d_n, D_n 的定义, 可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n/D_n = 0$, 所以 $D_{n_{k-1}}/D_{n_k} = 1 - d_n/D_n \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$, 故

$$1 \leq \frac{D_{n_k}}{a^k} = \frac{D_{n_k}}{D_{n_{k-1}}} \cdot \frac{D_{n_{k-1}}}{a^k} < \frac{D_{n_k}}{D_{n_{k-1}}} \rightarrow 1, k \rightarrow \infty.$$

因为 $D_{n_k} \sim a^k, k \rightarrow \infty$, 所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(|T_{n_k}| > \varepsilon) \ll \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln D_{n_k} (\ln \ln D_{n_k})^2} \ll \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k (\ln k)^2} < \infty.$$

由 Borel - Cantelli 引理知, $T_{n_k} \xrightarrow{a.s.} 0, k \rightarrow \infty$, 即 $D_{n_k}^{-1} \left| \sum_{k=1}^{n_k} d_k \xi_k \right| \xrightarrow{a.s.} 0, k \rightarrow \infty$. 又 $\forall n$, 存在 k , 使 $n_k \leq n < n_{k+1}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} |T_n| &= \frac{1}{D_n} \left| \sum_{k=1}^n d_k \xi_k \right| \leq \frac{1}{D_{n_k}} \left| \sum_{k=1}^{n_k} d_k \xi_k \right| + \frac{1}{D_{n_k}} \left| \sum_{k=n_k+1}^{n_{k+1}} d_k \xi_k \right| \leq |T_{n_k}| + \frac{2c}{D_{n_k}} (D_{n_{k+1}} - D_{n_k}) \\ &= |T_{n_k}| + 2c \left[\frac{D_{n_{k+1}}}{D_{n_k}} - 1 \right] \xrightarrow{a.s.} 2c(a-1). \end{aligned}$$

令 $a \rightarrow 1$, 则有 $T_n \xrightarrow{a.s.} 0, n \rightarrow \infty$. 因此式(5)成立, 定理 1 证毕。

2.2 定理2的证明

令 $W_i = \frac{Q_i}{i(i+1)\mu/2}$, 根据定义有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma\sigma_k} \sum_{i=1}^k (W_i - 1) &= \frac{1}{\gamma\sigma_k} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i \frac{(i+1-j)(X_j - \mu)}{i(i+1)\mu/2} = \frac{1}{\gamma\sigma_k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=j}^k \frac{(i+1-j)(X_j - \mu)}{i(i+1)\mu/2} \\ &= \frac{1}{\sigma_k} \sum_{j=1}^k c_{j,k} Y_j = \frac{S_{k,k}}{\sigma_k}. \end{aligned}$$

所以, 对于 $\forall x \in \mathbf{R}$, 式(2)等价于

$$\frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k I \left\{ \frac{1}{\gamma\sigma_k} \sum_{i=1}^k (W_i - 1) \leq x \right\} \rightarrow \Phi(x), \text{ a. s. } \quad (13)$$

所以由 $\frac{1}{\gamma\sigma_k} \sum_{i=1}^k \ln W_i = \ln \left[\prod_{i=1}^k \frac{Q_i}{i(i+1)(\mu/2)^k} \right]^{1/(\gamma\sigma_k)}$ 知, 为证明式(13), 只需证明对于 $\forall x \in \mathbf{R}$, 有

$$\frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k I \left\{ \frac{1}{\gamma\sigma_k} \sum_{i=1}^k \ln W_i \leq x \right\} \rightarrow \Phi(x), \text{ a. s. } \quad (14)$$

根据引理3, 对充分大的 i , 有

$$|W_i - 1| \ll ((\ln \ln i)/i)^{1/2}, \text{ a. s. }.$$

因 $\ln(1+x) = x + O(x^2)$, 当 $|x| < 1/2$ 时, 由 $W_i - 1 \rightarrow 0$, a. s., 得

$$\left| \sum_{i=1}^k \ln W_i - \sum_{i=1}^k (W_i - 1) \right| \ll \sum_{i=1}^k (W_i - 1)^2 \ll \ln k \ln \ln k, \text{ a. s. },$$

因此, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $n_0 = n_0(\varepsilon)$, 使得当 $k > n_0$ 时, 有

$$I \left\{ \frac{1}{\gamma\sigma_k} \sum_{i=1}^k (W_i - 1) \leq x - \varepsilon \right\} \leq I \left\{ \frac{1}{\gamma\sigma_k} \sum_{i=1}^k \ln W_i \leq x \right\} \leq I \left\{ \frac{1}{\gamma\sigma_k} \sum_{i=1}^k (W_i - 1) \leq x + \varepsilon \right\}.$$

因此, 式(14)成立, 定理2证毕。

参考文献:

- [1] 金敬森. 强混合序列部分和乘积的几乎处处中心极限定理 [J]. 浙江大学学报(理学版), 2007, 34(1): 24-27.
- [2] 冯凤香, 吴群英. α 混合随机变量序列部分和乘积的几乎处处中心极限定理 [J]. 应用数学, 2011, 24(1): 131-136.
- [3] 付艳莉, 吴群英. 强混合序列部分和之和乘积的几乎处处中心极限定理 [J]. 山东大学学报(理学版), 2010, 45(8): 104-108.
- [4] Peligrad M, Utev S. Central limit theorem for linear processes [J]. The Annals of Probability, 1997, 25(1): 443-456.
- [5] 陆传荣, 林正炎. 混合相依变量的极限理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- [6] Wu Q Y. Almost sure central limit theory for products of sums of partial sums [J]. Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities, 2012, 27(2): 169-180.
- [7] Peligrad M, Shao Q M. A note on the almost sure central limit theorem for weakly dependent random variables [J]. Statistics & Probability Letters, 1995, 22(2): 131-136.
- [8] Billingsley P. Convergence of probability measures [M]. New York: John Wiley & Sons, 2013.
- [9] Wu Q Y. A note on the almost sure limit theorem for self-normalized partial sums of random variables in the domain of attraction of the normal law [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2012(1): 1-10.
- [10] 冯凤香. 强混合随机变量序列的一个几乎处处中心极限定理 [J]. 桂林理工大学学报, 2014, 34(4): 782-784.
- [11] 叶大相, 吴群英. 部分和乘积的几乎处处中心极限定理 [J]. 桂林理工大学学报, 2011, 31(3): 471-472.

Promotion of strong mixing sequences weighted sum and products of sums of partial sums almost sure central limit theorem

HAO Xiao-chun, WU Qun-ying

(College of Science, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: Let $\{X, X_n, n \geq 1\}$ be identically distributed in strong positive mixing random variable sequence. On the basis of which almost sure central limit theorem with weight $d_k = k^{-1} \exp\{\ln^\alpha k\}$ ($0 \leq \alpha < 1/2$) was obtained for weighted sum and product of sums of partial sums by virtue of central limit theorem of weighted sums and the moment inequality.

Key words: strong mixing sequences; product of sums of partial sums; almost sure central limit theorem