

文章编号: 1674-9057(2018)01-0155-05

doi:10.3969/j.issn.1674-9057.2018.01.023

非自映射不动点集的稳定性及其在博弈中的应用

李天成, 宋奇庆

(桂林理工大学 理学院, 广西 桂林 541004)

摘 要: 运用一致拓扑方法研究了函数扰动条件下非自映射不动点集的本质稳定性及其在博弈论中的应用。结果表明, 大部分非自映射的不动点集都是本质稳定的, 在不动点集中至少存在一个极小本质集并且每一个极小本质集都是连通的, 进一步证明了不动点的本质稳定连通区的存在性, 推广了相应文献的结果; 作为不动点的本质稳定性和连通性结果的应用, 利用不动点与非合作博弈的 Nash 平衡点集之间的联系, 导出了 Nash 平衡点集的本质稳定连通区的存在性定理。

关键词: 非自映射; 不动点; 稳定性; 纳什均衡; 本质连通区

中图分类号: O177.91

文献标志码: A

0 引 言

不动点理论在博弈论和经济均衡理论中起到基础性的作用。Nash^[1]应用不动点定理证明了 Nash 平衡点的存在性定理。Arrow 等^[2]证明了一般经济均衡的存在性定理。由于并非所有连续映射都存在本质不动点, Kinoshita^[3]在 1952 年引入了不动点本质连通区的概念, 并证明了任意将 Hilbert 方体映射到自身的连续映射的不动点集都至少存在一个本质连通区。Jiang^[4-5]研究了集值映射的本质不动点, 并引入了集值不动点的本质连通区来研究非合作博弈问题。Yu 等^[6]研究了集值映射平衡点集的本质连通区, 并推导了重合点集的本质连通区的存在性定理。宋奇庆等^[7]研究了向量拟平衡问题系统解的强本质连通区, 并推导出多目标广义对策的强本质弱 Pareto-Nash 均衡点的存在性。Yang 等^[8]研究了博弈在支付和策略的双重扰动下纳什均衡的本质连通区, 建立了纳什均衡的存在性定理并推导了相应的结果。Song^[9]运用一致拓扑的方法研究了在函数和定义域同时扰动下不动点集的本质稳定性, 证明了不动点集的极小本

质集的存在性, 并且在一定的条件下极小本质集是连通的。

Banach 空间中的许多不动点定理限定在非空的紧子集或有界闭凸集上的自映射来讨论, 这种条件下的非自映射的不动点也吸引了众多关注: Radenovic 等^[10]研究了非自映射在锥度量空间的不动点定理, 推广了相应的不动点定理; Takahashi 等^[11]研究了 Hilbert 空间中非线性非自映射不动点定理, 并运用此定理证明了 Browder 不动点定理; 另外压缩和非扩张的非自映射等都吸引了众多学者的研究。这些文献表明, 非自映射不动点的存在性得到了广泛研究, 而其稳定性的研究还较缺乏。本文研究了非自映射不动点集的本质稳定性及其在博弈论中的应用。

1 预备知识

设 X 是欧氏空间 $(E, \|\cdot\|)$ 的一个非空紧凸子集, $K(X)$ 表示 X 中所有非空紧凸子集的集合。 $f: X \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 且 $f(Bd(X)) \subset X$ 是一个连续非自映射, 其中 $Bd(X)$ 表示集合 X 的边界, $C(X)$ 表示 X 上所有满足此条件的非自映射 f 的集合。令

收稿日期: 2016-01-11

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11661030; 61763008); 广西自然科学基金项目 (2016GXNSFAA380059); 广西哲学社会科学规划项目 (15FGL011)

作者简介: 李天成 (1990—), 男, 硕士, 研究方向: 博弈论, 171169913@qq.com。

通讯作者: 宋奇庆, 博士, 副教授, songqiqing@126.com。

引文格式: 李天成, 宋奇庆. 非自映射不动点集的稳定性及其在博弈中的应用[J]. 桂林理工大学学报, 2018, 38(1): 155-159.

$$P = \{f \mid f: X \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n, f(Bd(X)) \subset X\}.$$

对任意 $f_1 \in P, f_2 \in P$, 定义二者的距离为

$$d(f_1, f_2) = \max_{x \in X} \|f_1(x) - f_2(x)\|.$$

显然, (P, d) 是一个完备度量空间。

引理 1.1^[12-14] 对任意 $f \in P$, 存在 $x \in X$, 使得 x 为 f 的不动点, 即存在 $x \in X$, 使 $f(x) = x$ 。

对任意 $f \in P$, 定义 $S(f) = \{x \mid x = f(x)\}$, 即 $S(f)$ 为 f 在 X 上的所有不动点的集合。由引理 1.1 知, $S: P \rightarrow K(X)$ 是一个非空的集值映射。

定义 1.1 对 $\forall f \in P$, 称点 $x \in S(f)$ 是 $S(f)$ 关于 P 的本质点, 如果对 x 的任意开邻域 $O(x)$, 存在 $\delta > 0$, 使 $\forall f' \in P$, 当 $d(f, f') < \delta$ 时, 有 $S(f') \cap O(x) \neq \emptyset$ 。称非自映射 f 是弱本质的, 如果 f 存在 $x \in S(f)$ 是本质点。称非自映射 f 是本质的, 如果对 $\forall x \in S(f)$, x 都是 f 的本质点。

注: 如果每一个足够接近 f 的非自映射有不动点任意地接近 x^* , 一个非自映射 f 的不动点 x^* 是本质的。

定义 1.2 对 $\forall f \in P$, 设 $m(f)$ 是 $S(f)$ 的一个非空闭子集, 如果对 X 中的任意开集 U , 使 $U \supset m(f)$, 存在 $\delta > 0$, 满足对任意 $f' \in P$, 当 $d(f, f') < \delta$ 时, 有 $S(f') \cap U \neq \emptyset$, 则称 $m(f)$ 为本质集。

注: 如果一个关于 P 的本质集 $m(f) = \{x^*\}$ 是一个单点集, 则称 x^* 为 f 的本质不动点。

定义 1.3 如果 $e(f)$ 是 $S(f)$ 的本质集, 且是 $S(f)$ 中所有本质集按包含关系为序的极小元, 则称 $e(f)$ 是 $S(f)$ 的极小本质集。

定义 1.4 设 X 和 Y 是两个度量空间, $F: Y \rightarrow 2^X$ 是一个集值映射。

(1) 称 F 在 $y \in Y$ 处是上半连续的, 如果对任意开集 U , 有 $U \supset F(y)$, 存在 y 的开邻域 $O(y)$, 使对任意 $y' \in O(y)$, 都有 $U \supset F(y')$; 如果 F 在 Y 上的每一点都是上半连续的, 则称 F 在 Y 上是上半连续的。

(2) 称 F 在 $y \in Y$ 处是下半连续的, 如果对任意开集 U , 有 $F(y) \cap U \neq \emptyset$, 存在 y 的开邻域 $O(y)$, 使对任意 $y' \in O(y)$, 都有 $F(y') \cap U \neq \emptyset$ 。

(3) 称 F 是一个usco映射, 如果 F 在 Y 上是上半连续的并且对任意 $y \in Y$, $F(y)$ 都是紧的。

定义 1.5 对 $\forall f \in P, x \in S(f)$, 称 $S(f)$ 中包含点 x 的所有连通子集的并集为 $S(f)$ 的连通区。

如果 $S(f)$ 的一个连通分支 $C_\alpha(f)$ 是 $S(f)$ 的本质集, 则称 $C_\alpha(f)$ 是 $S(f)$ 的一个本质连通区。

为了得到非自映射不动点的本质稳定性的结果, 需要下面的引理。

引理 1.2^[15] 设 P 是 Hausdorff 拓扑空间, X 是紧空间。如果集值映射 $F: P \rightarrow 2^X$ 的图 $Gr(F)$ 是闭的, 那么 F 在 P 上是上半连续的。

引理 1.3^[16] 设 E 是度量空间, Y 是 Baire 空间, $F: Y \rightarrow 2^E$ 是usco映射, 则存在 Y 中的一个稠密剩余集 Q , 使 $\forall y \in Q$, 集值映射 F 在 y 是下半连续映射。

引理 1.4 设 $f_1 \in P, f_2 \in P$, 对任意 $\lambda: X \rightarrow [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} & d(\lambda(x)f_1 + (1 - \lambda(x))f_2, f_1) \\ & \leq d(f_2, f_1), \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

证明: 由 $1 \geq \lambda(x) \geq 0$, 得 $1 \geq 1 - \lambda(x) \geq 0$, 故

$$\begin{aligned} & d(\lambda(x)f_1 + (1 - \lambda(x))f_2, f_1) \\ & = \max_{x \in X} \|\lambda(x)f_1(x) + (1 - \lambda(x))f_2(x) - f_1(x)\| \\ & = \max_{x \in X} \|(\lambda(x) - 1)f_1(x) + (1 - \lambda(x))f_2(x)\| \\ & = (1 - \lambda(x)) \max_{x \in X} \|f_2(x) - f_1(x)\| \\ & = (1 - \lambda(x))d(f_2, f_1) \leq d(f_2, f_1). \end{aligned}$$

引理 1.5^[17] 设 X, Y 和 Z 是 3 个度量空间, $F: Y \rightarrow 2^X$ 是一个上半连续映射, $G: Z \rightarrow 2^X$ 是一个集值映射。假设存在连续函数 $T: Z \rightarrow Y$ 满足对 $\forall v \in Z$ 都有 $G(v) \supset F(u) = F(T(v))$ 。如果 $\forall u \in Y$, $F(u)$ 至少存在一个本质连通区, 那么对 $\forall v \in Z$, $G(v)$ 至少存在一个本质连通区, 其中 $u = T(v)$ 。

2 函数扰动的条件下非自映射不动点集的本质稳定性

本部分考虑了在函数扰动的条件下非自映射不动点集的本质稳定性, 根据不动点集的连续性, 推导出一些本质稳定的结果。

定理 2.1 $S: P \rightarrow K(X)$ 在 P 上是上半连续的, 且对任意 $f \in P$, $S(f)$ 是紧集。

证明: (1) 取 $x_n \rightarrow x_0$ 且 $x_n \in S(f)$, 则有 $f(x_n) = x_n$ 。

$$\begin{aligned} & \text{由 } f \text{ 的连续性及 } x_n \rightarrow x_0 \text{ 得} \\ & d(x_0, f(x_0)) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, f(x_n)) + \\ & d(f(x_n), f(x_0)) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

则有 $f(x_0) = x_0$, 故 $x_0 \in S(f)$, 从而 $S(f)$ 是闭集。又因 $S(f) \subset X$, 且 X 是紧集, 故 $S(f)$ 是紧集。

(2) 因 X 是紧集, 所以只需证明集值映射 S 的图是闭的。

令 $Gr(S) = \{(f, x) \in P \times X \mid x \in S(f)\}$, 取 $(f_n, x_n) \in Gr(S)$ 且 $(f_n, x_n) \rightarrow (f_0, x_0)$, 则有 $f_n \in P$ 且 $x_n \in S(f_n)$, 即 $f_n(Bd(X)) \subset X$ 且 $f_n(x_n) = x_n$, 故对于任意 $x \in Bd(X)$, 有 $f_n(x) \in X$ 。

因 $f_n \rightarrow f_0$, $x_n \rightarrow x_0$, 有 $d(f_0(x), X) \leq d(f_0(x), f_n(x)) + d(f_n(x), X) \rightarrow 0$, 其中 $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ 。

$d(x_0, f_0(x_0)) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, f_n(x_n)) + d(f_n(x_n), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f_0(x_0)) \rightarrow 0$, 得 $f_0(x) \in X$ 且 $f_0(x_0) = x_0$, 所以 $f_0(Bd(X)) \subset X$ 且 $f_0(x_0) = x_0$, 即 $f_0 \in P$ 且 $x_0 \in S(f_0)$, 故 $(f_0, x_0) \in Gr(S)$, 从而 $Gr(S)$ 是闭的, 所以 S 是上半连续的。

推论 2.1 在 Baire 分类意义下, 对大多数 $f \in P$ 都是本质的。

证明: 根据引理 1.3 和定理 2.1, 存在 P 中的一个稠密剩余集 Q , 使 $\forall f \in Q$, 集值映射 S 是下半连续的, 即对任意 $f \in Q$, $\forall x_0 \in S(f)$, 对 x_0 的任意开邻域 $U(x_0)$, 有 $S(f) \cap U(x_0) \neq \emptyset$, 存在 f 的邻域 $O(f)$, 使 $\forall f' \in O(f)$, 都有 $S(f') \cap U(x_0) \neq \emptyset$ 。因此, x_0 是本质的, 从而 f 是本质的。

定理 2.2 对于每一个 $f \in P$, $S(f)$ 本身是本质稳定的且至少存在一个极小本质集 $e(f)$ 。

证明: (1) 任取开集 U , 满足 $U \supset S(f)$ 。由定理 2.1 知 S 是上半连续的, 故 f 存在一个开邻域 $O(f)$, 使得任意 $f' \in O(f)$ 都有 $S(f') \subset U$, 故 $S(f') \cap U \neq \emptyset$, 所以 $S(f)$ 是本质稳定的。

(2) 设 Φ 为 $S(f)$ 中的所有本质稳定子集的全体, 则 $\Phi \neq \emptyset$, 其中 Φ 中元素以集合的包含关系为序。设 Φ 中的任意全序子集为 $\{e_{\alpha}(f)\}_{\alpha \in I}$ (其中 I 为指标集), 即 $e_{\alpha_1}(f) \supset e_{\alpha_2}(f) \supset \cdots \supset e_{\alpha_j}(f)$ 。由于每一个 $e_{\alpha}(f)$ 都是本质的。当定义 $\bigcap_{\alpha \in I} e_{\alpha}(f) = e(f)$ $\subset \Phi$, 则 $e(f)$ 是本质的且为下降链 $\{e_{\alpha}(f)\}$ 的下界, 由 Zorn 引理知 Φ 有极小元 $e(f)$, 而极小元必是 $S(f)$ 的极小本质集。故 $S(f)$ 至少存在一个极小本质稳定的集合 $e(f)$ 。

注: 对 $\forall f \in P$, 如果 $S(f)$ 是完全不连通的, 根据定理 2.2, 则关于 P 的 f 至少存在一个本质不动

点, 故 f 是弱本质的。

根据定理 2.2, 如果不动点集 $S(f)$ 是单点集, 则可以推导出下面的结果。

推论 2.2 对 $f \in P$, 如果 $S(f) = \{x^*\}$, 则 x^* 是 $S(f)$ 中的本质不动点, 从而 f 是本质的。

证明: 根据定理 2.2 知 $S(f)$ 是本质的, 又因 x^* 是 $S(f)$ 的单点集, 故 x^* 是 $S(f)$ 的本质不动点, f 是本质的。

定理 2.3 对于每一个 $f \in P$, $S(f)$ 的每一个极小本质集 $e(f)$ 都是连通的。

证明: 假设 $e(f)$ 是不连通的, 则存在两个非空闭集 C_1, C_2 和两个开集 G_1, G_2 , 使 $G_1 \supset C_1, G_2 \supset C_2, e(f) = C_1 \cup C_2$ 且 $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ 。因 $e(f)$ 是极小本质集, 故 C_1 和 C_2 都不是 $S(f)$ 的本质集, 所以存在两个开集 Q_1 和 Q_2 , 使 $Q_1 \supset C_1, Q_2 \supset C_2$, 而对 $\forall \delta_0 > 0$, 存在 $f_1', f_2' \in P$, 使 $d(f, f_1') < \delta_0, d(f, f_2') < \delta_0$, 但是 $S(f_1') \cap Q_1 = \emptyset, S(f_2') \cap Q_2 = \emptyset$ 。令 $U_1 = G_1 \cap Q_1, U_2 = G_2 \cap Q_2$, 显然, $U_1 \supset C_1, U_2 \supset C_2$, 且 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ 。由于 C_1, C_2 都是紧集, 故存在两个开集 W_1, W_2 , 满足 $U_1 \supset \overline{W_1} \supset W_1 \supset C_1, U_2 \supset \overline{W_2} \supset W_2 \supset C_2$ 。显然 $e(f) = C_1 \cup C_2 \subset W_1 \cup W_2, W_1 \subset Q_1, W_2 \subset Q_2$ 。

由于 $e(f) \subset W_1 \cup W_2$ 是本质的, 则存在 $\delta > 0$, 使 $\forall f' \in P$, 当 $d(f, f') < \delta$ 时, 有 $S(f') \cap (W_1 \cup W_2) \neq \emptyset$ 。由于 $W_1 \subset Q_1$, 故对 $\forall \frac{1}{3}\delta > 0$,

存在 $f_1 \in P$, 使 f_1 满足 $d(f, f_1) < \frac{\delta}{3}$, 但是 $S(f_1) \cap W_1 = \emptyset$ 。由 $W_2 \subset Q_2$ 得, 对 $\forall \frac{1}{3}\delta > 0$, 存在 $f_2 \in P$, 使 f_2 满足 $d(f, f_2) < \frac{\delta}{3}$, 但是 $S(f_2) \cap W_2 = \emptyset$ 。

在 X 上构造函数:

$f'(x) = \lambda_1(x)f_1(x) + \lambda_2(x)f_2(x), \forall x \in X$, 其中,

$$\lambda_1(x) = \frac{d(x, \overline{W_2})}{d(x, \overline{W_1}) + d(x, \overline{W_2})},$$

$$\lambda_2(x) = \frac{d(x, \overline{W_1})}{d(x, \overline{W_1}) + d(x, \overline{W_2})}.$$

这里, $\lambda_1(x)$ 和 $\lambda_2(x)$ 都是连续的, 对 $\forall x \in X, \lambda_1(x) \geq 0, \lambda_2(x) \geq 0$, 且 $\lambda_1(x) + \lambda_2(x) = 1$ 。

以下验证 $f' \in P$: 对 $f_1 \in P, f_2 \in P$, 即

$f_1(Bd(X)) \subset X, f_2(Bd(X)) \subset X$, 所以对任意 $x \in Bd(X)$, 有 $f_1(x) \in X, f_2(x) \in X$ 。又由于 X 是凸集, 故 $\lambda_1(x)f_1(x) + \lambda_2(x)f_2(x) \in X$, 即 $f'(x) \in X$, 所以 $f'(Bd(X)) \subset X$ 。又由于 f_1 和 f_2 在 X 上都是连续的, 故 f' 在 X 上也是连续的, 所以 $f' \in P$ 。

由于

$$\begin{aligned} d(f', f_1) &= d(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, f_1) \leq d(f_2, f_1) \\ &\leq d(f_2, f) + d(f, f_1) \leq \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \frac{2}{3}\delta, \end{aligned}$$

故

$$d(f', f) \leq d(f', f_1) + d(f_1, f) \leq \frac{2}{3}\delta + \frac{1}{3}\delta = \delta.$$

从而 $S(f') \cap (W_1 \cup W_2) \neq \emptyset$, 即 $S(f') \cap W_1 \neq \emptyset$ 或 $S(f') \cap W_2 \neq \emptyset$ 。

若 $S(f') \cap W_1 \neq \emptyset$, 也就是说存在 $x^* \in S(f') \cap W_1$ 。由 $x^* \in W_1$ 得 $\lambda_1(x^*) = 1, \lambda_2(x^*) = 0$, 故 $f'(x^*) = f_1(x^*)$ 。由 $x^* \in S(f')$ 得 $x^* = f'(x^*) = f_1(x^*)$, 所以 $x^* \in S(f_1)$, 故 $S(f_1) \cap W_1 \neq \emptyset$, 这与 $S(f_1) \cap W_1 = \emptyset$ 矛盾。

若 $S(f') \cap W_2 \neq \emptyset$, 也就是说存在 $x^* \in S(f') \cap W_2$ 。由 $x^* \in W_2$ 得 $\lambda_1(x^*) = 0, \lambda_2(x^*) = 1$, 故 $f'(x^*) = f_2(x^*)$ 。由 $x^* \in S(f')$ 得 $x^* = f'(x^*) = f_2(x^*)$, 所以 $x^* \in S(f_2)$, 故 $S(f_2) \cap W_1 \neq \emptyset$, 这与 $S(f_2) \cap W_2 = \emptyset$ 矛盾。

故假设不成立, 因而 $e(f)$ 是连通的。

定理 2.4 $\forall f \in P, S(f)$ 至少存在一个本质稳定连通区。

证明: 由定理 2.2 和定理 2.3 知, $S(f)$ 至少存在一个极小本质集 $e(f)$, 且 $e(f)$ 是连通的, 故 $\exists \alpha \in \Lambda$, 使 $e(f) \subset C_\alpha(f)$ 。对 X 中的任意开集 N , 使 $N \supset C_\alpha(f)$, 则 $N \supset e(f)$ 。因 $e(f)$ 是本质的, 故 $\exists \delta > 0$, 使 $\forall f' \in P, d(f, f') < \delta$, 有 $S(f') \cap N \neq \emptyset$, 故连通区 $C_\alpha(f)$ 是本质稳定的。

注: 定理 2.4 在有限维的情况下, 推广了文献 [3] 中相应结果; 在函数扰动条件下, 定理 2.3 包括了文献 [9] 中的定理 5。

定义 2.1 称 X 具有本质连通区的性质, 如果对任意连续函数 $f: X \rightarrow X$ 的不动点集都至少存在一个本质连通区。

由定理 2.4, 当 f 为自映射时, 易推导出下面结果。

推论 2.3 \mathbf{R}^n 中每一个非空有界闭凸集 C 都

有本质连通区的性质。

3 应用

本部分通过运用本文中的不动点稳定性方法和结果来对非合作博弈的纳什均衡的稳定性进行分析, 推导出纳什均衡点的本质稳定连通区的存在性定理。

一个非合作博弈 $(\gamma_1, \dots, \gamma_n; X_1, \dots, X_n)$ 的标准形式如下: 设 $I = \{1, 2, \dots, n\}$ 是参与人的集合, 对 $\forall i \in I$, 非空集合 X_i 是参与人 i 的策略集, $\gamma_i: X = \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是参与人 i 的得益函数, 定义 $X_{-i} = \prod_{j \in I \setminus i} X_j, x = (x_1, \dots, x_n) \in X, x_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X$ 。一个策略组合 $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in X$ 是 n 人非合作博弈的一个 Nash 均衡点, 如果对 $\forall i \in I$, 有 $\gamma_i(x_i^*, x_{-i}^*) = \max_{x_i \in X_i} \gamma_i(x_i, x_{-i}^*)$ 。

对 $\forall i \in I$, 设 X_i 为欧氏空间 E_i 的一个非空紧凸子集, M 为所有得益函数 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ 的集合, 且满足条件: (1) 对 $\forall i \in I, \gamma_i: X \rightarrow \mathbf{R}^n$ 在 X 上是连续函数; (2) 对 $\forall x_{-i} \in X_{-i}, \gamma_i \rightarrow \gamma_i(y_i, x_{-i})$ 是拟凹的。

对 $\forall \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in M$, 由 γ 可以确定一个 n 人非合作博弈。这样, 可称 M 为博弈空间。对 $\forall m_1 = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in M, \forall m_2 = (\gamma_1', \gamma_2', \dots, \gamma_n') \in M$, 定义二者的距离为

$$d(m_1, m_2) = \sup_{x \in X} \sum_{i=1}^n |\gamma_i(x) - \gamma_i'(x)|.$$

显然, (M, d) 是一个完备度量空间。

对任一 $m = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in M$, 定义 $NE(m)$ 为博弈 m 的所有 Nash 均衡点的集合。可知, 博弈 m 至少存在一个 Nash 均衡点, 即 $NE(m) \neq \emptyset$, 则 $NE(m): M \rightarrow 2^X$ 是一个非空的集值映射。

对 $\forall x \in X, y_i \in X_i$, 定义 $\varphi_i(x, y_i): X \times X_i \rightarrow \mathbf{R}_+$, 其中

$$\varphi_i(x, y_i) = \max\{0, \gamma_i(x_{-i}, y_i) - \gamma_i(x)\}.$$

定理 3.1 对 $\forall m \in M, NE(m)$ 中至少存在一个本质稳定连通区。

证明: 对 $\forall m \in M$, 定义 $T(m) = f$, 对 $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X, f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, 其中

$$f_i(x) = \frac{x_i + \int_{X_i} \varphi_i(x, y) y dy}{1 + \int_{X_i} \varphi_i(x, y) dy}.$$

由文献[18]定理2的证明知,函数 f 在 X 上是连续的,且 f 的每一个不动点都是博弈 m 的Nash均衡点。因此,定义从 M 到 P 的映射为 T ,则映射 T 是连续的,从而有 $S(f) = S(T(m)) \subset NE(m)$,所以由引理1.5和定理2.4知, $NE(m)$ 至少存在一个本质稳定连通区。

参考文献:

- [1] Nash J. Non-cooperative games [J]. Annals of Mathematics, 1951, 54 (2): 286 – 295.
- [2] Arrow K J, Debreu G. Existence of an equilibrium for a competitive economy[J]. Econometrica, 1954, 22(3):265 – 290.
- [3] Kinoshita S. On essential components of the set of fixed points [J]. Osaka Mathematical Journal, 1952, 4 (1): 19 – 22.
- [4] Jiang J H. Essential fixed points of the multivalued mappings [J]. Scientia Sinica, 1962, 11 (3): 293 – 298.
- [5] Jiang J H. Essential component of the set of fixed points of the multivalued mappings and its application to the theory of games [J]. Scientia Sinica, 1963, 12 (7): 951 – 964.
- [6] Yu J, Yang H. The essential components of the set of equilibrium points for set-valued maps [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 300 (2): 334 – 342.
- [7] 宋奇庆,林亮,张志平. 向量拟平衡问题系统解集的强本质集及应用[J]. 桂林工学院学报, 2008, 28(3):434 – 437.
- [8] Yang H, Xiao X C. Essential components of Nash equilibria for games parametrized by payoffs and strategies [J]. Nonlinear Analysis, 2009, 71 (12): e2322 – e2326.
- [9] Song Q Q. On essential sets of fixed points for functions [J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 2015, 36: 942 – 950.
- [10] Radenovic S, Rhoades B E. Fixed point theorem for two non-self mappings in cone metric spaces [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2009, 57 (10): 1701 – 1707.
- [11] Takahashi W, Wong N C, Yao J C. Fixed point theorems for nonlinear non-self mappings in Hilbert spaces and applications [J]. Fixed Point Theory and Applications, 2013 (1): Dio; <http://doi.org/10.1186/1687-1812-2013-116>.
- [12] Knaster B, Kuratowski C, Mazurkiewicz S. Ein Beweis des fixpunktsatzes für n -dimensionale simplexe [J]. Fundamenta Mathematicae, 1929, 1 (14): 132 – 137.
- [13] Brouwer L E J. Über eindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich [J]. Mathematische Annalen, 1910, 69 (2): 176 – 180.
- [14] Park S. Ninety years of the Brouwer fixed point theorem [J]. Vietnam Journal of Mathematics, 1999, 27 (3): 187 – 222.
- [15] Song Q Q, Wang L S. On the stability of the solution for multiobjective generalized games with the payoffs perturbed [J]. Nonlinear Analysis, 2010, 73 (8): 2680 – 2685.
- [16] Xiang S W, Jia W S, He J H, et al. Some results concerning the generic continuity of set-valued mappings [J]. Nonlinear Analysis, 2012, 75 (8): 3591 – 3597.
- [17] Yang H, Yu J. Essential components of the set of weakly Pareto-Nash equilibrium points [J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15 (5): 553 – 560.
- [18] Becker R A, Chakrabarti S K. Satisficing behavior, Brouwer's fixed point theorem and Nash equilibrium[J]. Economic Theory, 2005, 26(1): 63 – 83.

On the stability of fixed-point set for non-self mapping and application in game theory

LI Tian-cheng, SONG Qi-qing

(College of Science, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: This article studies the essential stability of fixed-point set for non-self mapping under the condition of function perturbation using uniform topology and its application in game theory. The results show that most of the fixed-point sets of non-self mappings are essentially stable and there exists at least one minimal essential set, and each minimal essential set is connected. Furthermore, this proves the existence of essential components of fixed-points. These generalize some corresponding results in references. As the part of the application about the essential stability and connectivity of fixed-points, the existence of essential connected components of the set of Nash equilibrium point for non-cooperative game is derived by the connection of fixed points and Nash equilibrium points for non-cooperative game.

Key words: non-self mapping; fixed-point; stability; Nash equilibrium; essential component