

文章编号: 1006-544X(2003)02-0226-04

# 区间型灰线性方程组的新定义及算法

韩飞<sup>1</sup>, 张敏<sup>2</sup>

(1. 桂林工学院 数理系, 广西 桂林 541004; 2. 桂林工学院 土木工程系, 广西 桂林 541004)

**摘要:** 灰色数学是随着灰色理论的发展而发展起来的崭新的数学研究领域, 但现有的区间型灰线性方程组的定义有局限性. 本文给出了区间型灰线性方程组的新定义和区间型灰线性方程组的算法, 并把区间型灰线性方程组应用于一个简化的经济模型中, 取得令人满意的结果.

**关键词:** 灰色数学; 区间型灰线性方程组; 新定义; 算法

**中图分类号:** O159

**文献标识码:** A<sup>①</sup>

王清印教授在文献 [1] 中提出了区间型灰线性方程组 (以下简称灰方程组) 的定义和算法. 笔者在研究中发现王清印教授对灰方程组的定义有局限性, 根据灰数的运算性质和实际中遇到的情况, 笔者提出了区间型灰线性方程组的新定义, 并给出了新定义下区间型灰线性方程组的算法, 并编制了新解法相应的计算机程序.

## 1 区间型灰线性方程组的新定义

### 1.1 文献 [1] 的定义

文献 [1] 给出的区间型灰矩阵概念: 设  $G_{a_i, b_j} \in g(I)$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ), 称  $m$  行  $n$  列数表

$$\begin{matrix} G_{a_1, b_1} & G_{a_2, b_2} & \cdots & G_{a_1, b_n} \\ G_{a_2, b_1} & G_{a_2, b_2} & \cdots & G_{a_2, b_n} \\ & & \cdots & \\ G_{a_m, b_1} & G_{a_m, b_2} & \cdots & G_{a_m, b_n} \end{matrix}$$

为  $m \times n$  区间型灰矩阵, 简称为灰矩阵, 记为

$$A = (G_{a_i, b_j}) = (G) = \begin{bmatrix} G_{a_1, b_1} & G_{a_2, b_2} & \cdots & G_{a_1, b_n} \\ G_{a_2, b_1} & G_{a_2, b_2} & \cdots & G_{a_2, b_n} \\ & & \cdots & \\ G_{a_m, b_1} & G_{a_m, b_2} & \cdots & G_{a_m, b_n} \end{bmatrix}$$

当  $m = n$  时, 称  $(G)$  为  $n$  阶灰方阵, 文献 [1] 对区间型灰线性方程组的定义:

$\forall G_{a_{ij}, b_{ij}}, G_{x_{ij}, y_{ij}}, G_{c_i, d_i} \in g(I)$ , 称

$$\sum_{j=1}^n G_{a_{ij}, b_{ij}} G_{x_{ij}, y_{ij}} = G_{c_i, d_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

① 收稿日期: 2001-11-27; 修订日期: 2002-02-29

作者简介: 韩飞 (1977-), 男, 河南商丘人, 助教, 应用数学专业.

为  $n$  元区间型灰线性方程组, 简称灰线性方程组. 在方程组 (1) 的系数为邓氏灰数或部分为邓氏灰数的情况下的讨论仍成立. 下面在不引起混淆的情况下以  $[a, b]$  表示区间型灰数  $G \mid \bar{u}$ , 所以方程组 (1) 可表示成:

$$\left. \begin{aligned} [a_{11}, b_{11}][x_1, y_1] + \cdots + [a_{1n}, b_{1n}][x_n, y_n] &= [c_1, d_1] \\ [a_{21}, b_{21}][x_2, y_2] + \cdots + [a_{2n}, b_{2n}][x_n, y_n] &= [c_2, d_2] \\ &\dots\dots \\ [a_{m1}, b_{m1}][x_1, y_1] + \cdots + [a_{mn}, b_{mn}][x_n, y_n] &= [c_m, d_m] \end{aligned} \right\}$$

相应可以简记为  $AX = C$ . 这种类型的方程可以进一步推广.

### 1.2 区间型灰线性方程组的新定义

定义:  $A_i (i = 1, 2, \dots, k)$  为任意  $m \times n$  区间型灰矩阵,  $X, B$  为  $n$  个元素的区间型灰列向量, 则称

$$A_1 X + A_2 X + \cdots + A_k X = B \quad (3)$$

为  $n$  元区间型灰线性方程组, 简称为  $m \times n$  灰线性方程组.

显然当  $k=1$  时, 此方程就是文献 [1] 定义的灰方程组, 因此, 文献 [1] 定义的灰方程组即是本定义下灰方程组的特例. 由于灰数特殊的运算性质, 乘法对加法的分配律一般不成立, 例如

$$[-2, 2] * ([-1, 2] + [-2, 1]) = [-6, 6],$$

$$[-2, 2] * [-1, 2] + [-2, 2] * [-2, 1] = [-8, 8],$$

所以在定义中文献 [1] 给出的定义是不能表示一般的区间型灰线性方程组的.

### 1.3 区间型灰线性方程组的解法

对于式如 (3) 的灰方程组来说: 首先, 当  $k=1$  时, 可以用文献 [1] 提出的解法对方程组求解. 当  $k>1$  时, 由于乘法对加法的分配律一般不成立, 不能移项把  $A_i$  合并, 所以可以用迭代方法. 显然, 根据迭代的思想, 对于给定的方程组 (3), 设有唯一解  $X^*$ , 则  $A_1 X^* + A_2 X^* + \cdots + A_k X^* = B$ , 又设  $x^{(0)}$  为任取的初始向量, 按下列公式构造向量序列

$$\left. \begin{aligned} A_1 X^{(1)} &= B - A_2 X^{(0)} - \cdots - A_k X^{(0)} \\ A_1 X^{(2)} &= B - A_2 X^{(1)} - \cdots - A_k X^{(1)} \\ &\dots\dots \\ A_{(l+1)} X^{(l)} &= B - A_2 X^{(l)} - \cdots - A_k X^{(l)} \\ &\dots\dots \end{aligned} \right\}$$

其中  $l$  为迭代次数, 当  $\lim_{l \rightarrow \infty} X^{(l)}$  存在时 (记为  $X^*$ ), 称此迭代法收敛, 显然  $X^*$  就是方程组的解, 否则称此迭代法发散.

$$\lim_{l \rightarrow \infty} [a_l, b_l] = [a, b] \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{l \rightarrow \infty} a_l = a, \\ \lim_{l \rightarrow \infty} b_l = b. \end{cases}$$

区间型灰数收敛表现为区间的两个端点的数列收敛, 即当两个端点的数列都收敛时灰数收敛. 那么在迭代时就可以用上面的迭代思想来解方程组. 迭代公式为

$$\left. \begin{aligned} X^{(0)} &\text{ 初始值} \\ A_1 X^{(1+1)} &= B - A_2 X^{(1)} - \cdots - A_k X^{(1)} \end{aligned} \right\}$$

每次迭代时, 当等号右端值求出时, 要计算下一次的迭代值都要利用文献 [1] 提出的算法, 在编程时可把前面讨论的程序当作子程序调用.

## 2 区间型灰线性方程组在投入产出模型中的应用

设某工厂有 5 个车间甲乙丙丁戊, 5 个车间之间有的要相互提供产品 (或服务), 根据历年的统计 5

个车间之间的消耗系数矩阵如表1,今年厂领导根据市场的态势给各个车间下达了预期出厂产值的弹性目标(以万元计),其值如表2.求各个车间要达到目标时的总产量各是多少.

由于车间之间要提供产品,一个车间在创造新价值时消耗了别的车间创造的价值.消耗系数的实际意义是本车间在生产单位产值时要消耗的别的车间生产的价值量.消耗矩阵的意义是:表中每一列表示该车间对别的车间的消耗系数.

表1 消耗系数

Table 1 Coefficient of consumption

	甲	乙	丙	丁	戊
甲	[0.08,0.12]	[0.095,0.15]	[0,0]	[0.045,0.055]	[0.045,0.065]
乙	[0.045,0.055]	[0.025,0.035]	[0.023,0.035]	[0.085,0.104]	[0.06,0.12]
丙	[0.18,0.22]	[0.225,0.35]	[0.036,0.04]	[0.05,0.085]	[0.12,0.18]
丁	[0.081,0.14]	[0,0]	[0,0]	[0.085,0.12]	[0.12,0.15]
戊	[0.045,0.055]	[0,0]	[0.04,0.06]	[0.05,0.1]	[0.06,0.11]

表2 某季度各车间出厂产值目标

Table 2 Production in a quarter

车间名	甲	乙	丙	丁	戊
目标产值/(万元)	[120,180]	[240,280]	[160,200]	[120,150]	[220,280]

可以认为,车间之间的消耗系数是相对比较稳定的,即今年消耗系数表是符合以往的统计规律.根据该厂给出的数据,可以把消耗系数和生产要求已给出的量看做区间型灰数(信息型灰数),那么消耗矩阵可记为

$$A = \begin{Bmatrix} [0.080, 0.120] & [0.095, 0.150] & [0.000, 0.000] & [0.045, 0.055] & [0.045, 0.065] \\ [0.045, 0.055] & [0.025, 0.035] & [0.023, 0.035] & [0.085, 0.104] & [0.040, 0.120] \\ [0.180, 0.220] & [0.225, 0.350] & [0.036, 0.040] & [0.050, 0.058] & [0.120, 0.180] \\ [0.080, 0.140] & [0.000, 0.000] & [0.000, 0.000] & [0.085, 0.120] & [0.120, 0.150] \\ [0.045, 0.055] & [0.000, 0.000] & [0.040, 0.060] & [0.050, 0.100] & [0.060, 0.110] \end{Bmatrix}$$

设各个车间的总产量向量为

$$X = \begin{bmatrix} [x_1, y_1] \\ [x_2, y_2] \\ [x_3, y_3] \\ [x_4, y_4] \\ [x_5, y_5] \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} [120, 180] \\ [220, 280] \\ [160, 200] \\ [120, 150] \\ [220, 280] \end{bmatrix}$$

出厂产量的向量  $Y$  是灰数,由平衡方程  $X = AX + Y$

计算(迭代次数是12,精度是  $1E-4$ ),结果为

$$[x_1, y_1] = [182.718, 322.195]$$

$$[x_2, y_2] = [294.164, 409.227]$$

$$[x_3, y_3] = [311.277, 532.594]$$

$$[x_4, y_4] = [182.171, 290.386]$$

$$[x_5, y_5] = [265.725, 403.026]$$

结果分析:根据下达的弹性目标,要达到要求,甲乙丙丁戊5个车间在本阶段的总产值要分别在各自的解区间中.也就是说,在本阶段,甲车间的出厂值要达到100~140万元,那么甲车间的总产值就要在128.7~322.2万元之间,其他车间类似.这样一来,各个车间就容易安排生产了.

## 参考文献

- [1] 王清印. 灰色数学基础[M]. 武汉:华中理工大学出版社, 1996. 7-69.
- [2] 湖北工学院数学教研室. 线性代数及其应用[M]. 武汉:华中理工大学出版社 1996. 204-211.

## New definition and algorithm of interval grey linear equation group

HAN Fei<sup>1</sup>, ZHANG Min<sup>2</sup>

- (1. *Department of Maths and Physics, Guilin Institute of Technology, Guilin 541004, China;*
2. *Department of Civil Engineering, Guilin Institute of Technology, Guilin 541004, China*)

**Abstract:** Grey mathematics is a new research field which has developed with the grey system theory. In the research of interval grey linear equation group there is a limitation in the definition of it. A new definition of interval grey linear equation group and its algorithm is put forward with a satisfying outcome after applying it in an economic model.

**Key words:** grey mathematics; interval grey linear equation group; new definition; algorithm.