

地图投影的拓扑学原理

钟业勋^{1,2}, 童新华¹, 韦清嫒², 刘润东²

(1. 广西师范学院 资源与环境科学学院, 南宁 530001; 2. 广西测绘地理信息局, 南宁 530023)

摘要: 根据拓扑映射的定义, 指出了“刺孔球面”($S^2 - \{z\}$)与二维平面 R^2 的同胚性质。从有限闭区间及其彼此等势的拓扑学原理, 推出 $f(A)$ 为非空集。 $f(A)$ 的边界是二维平面上的约当闭曲线, 约当闭曲线的任意性, 使得 $f(A)$ 可以在拓扑变换下变形为任意的形状, 构造多种多样的投影网格。以若干实例说明了拓扑映射 $f \supset f_1 \circ f_2$ 的实现方法。

关键词: 地图投影; 拓扑映射; 刺孔球面; 二维平面; 同胚; 约当曲线

中图分类号: P282

文献标志码: A

比较构成了所有科学解释的核心 (Armer, 1973; Bailey, 1982; Blalock, 1961; Nage, 1961); 所有科学本质上都比较的 (Klingman, 1980); 有的学者认为, 没有比较就没有科学思想 (Swanson, 1971)^[1]。地理变量量表的本质差异在于其满足的偏序集条件不同; 定名量表的众数通过不同质事物量的比较来确定; 山、谷、鞍部等基本地貌形态的得名, 是定义域内特征点与其他点高程比较的结论; 不同的地图符号, 关联着不同的约束变换条件; 物质存在的不同时空条件, 对应着不同的时态, ……^[2-7]。地图投影具有悠久的历史: 公元前3—前2世纪, 希腊的埃拉托色尼 (Eratoshenec, 公元前276—前194年) 就应用经纬网绘制地图了; 而希帕恰斯 (Hipparchus, 公元前约190—前125年) 则创立极射投影和正射投影; 荷兰地图学家托勒密 (Claudius ptolemaeus, 公元90—168年) 拟定了伪圆锥投影及简单的圆锥投影。德国数学家高斯 (Gauss, 1777—1855年) 发明了横轴圆柱投影——高斯投影。高斯投影、墨卡托投影、兰勃特投影等, 至今仍是我国大中专《地图投影》等相关课程中的经典内容^[8-10]。为什么球面上一个简单的图形会有如此丰富的地图投影方案? 这投影差异

之外必定有更根本的共同点。有鉴于在这方面似乎鲜有探究的文献, 笔者想从拓扑映射的角度, 对这一问题作一探讨性的尝试。

1 基于刺孔球面 ($S^2 - \{z\}$) 与二维平面 R^2 同胚的地图投影定义

定义1 同胚 设 X 与 Y 是两个随意的拓扑空间, 并设 $f: X \rightarrow Y$ 。如果 f 是连续的双一一函数, 并且它的反函数 f^{-1} 也是连续的, 那么, f 就叫做空间 X 到空间 Y 上的一个同胚或拓扑映射或拓扑变换; 此时空间 X 与空间 Y 叫做同胚的, 记为 $X \approx Y$ 。

设 S^2 表示单位球面 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, 令 z 表示它的“北极”(0,0,1), 则通过球极平面射映 (stereographic projection) 即可看出“刺孔球面”($S^2 - \{z\}$)与平面 $x_3 = -1$ 同胚, 从而与坐标平面 R^2 同胚, 即 $(S^2 - \{z\}) \approx R^2$ 。

“刺孔球面”($S^2 - \{z\}$)与二维平面 R^2 同胚原理, 是建立以球面坐标 (以纬度 φ 与经度 λ) 的球面二维场与平面二维场 (平面直角坐标 x, y) 之间的地图投影的基本原理。

定义2 地图投影 存在“刺孔球面”($S^2 - \{z\}$), 二维平面 R^2 以及变换 $f \supset f_1 \circ f_2 \mid f_1 = f_2 \vee f_1$

$\neq f_2$, 若 $\forall p(\varphi, \lambda) \in A \in (S^2 - \{z\})$ 满足

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(\varphi, \lambda) \\ y &= f_2(\varphi, \lambda) \end{aligned} \right\} \Big| (x, y) \in R^2, \tag{1}$$

则称满足式(1)的变换为地图投影, $f \supset f_1, f_2$ 不同, 便构成不同的地图投影。

2 地图投影类型繁多的拓扑学基础

2.1 地球面上的制图区域 $A \in (S^2 - \{z\})$ 为有限闭区域

“刺孔球面” $(S^2 - \{z\})$ 上可以表示为它所包含的经线 λ_i 或纬线 φ_j 的并集, 即

$$\begin{aligned} (S^2 - \{z\}) &= \bigcup_{i \in I} \lambda_i \Big| i \in [0^\circ, \pm 180^\circ] \\ &= \bigcup_{j \in J} \varphi_j \Big| j \in [0^\circ, \pm 90^\circ). \end{aligned} \tag{2}$$

因此, 对任意的制图区域 $A \in (S^2 - \{z\})$, 均有一组西经线 λ_W 、东经线 λ_E 、南纬线 φ_S 和北纬线 φ_N 为其边界线。

定义3 A的边界线 \exists 经线 λ_W 和 λ_E 、纬线 φ_S 和 φ_N , 若满足

$$\forall p(\varphi_j, \lambda_i) \in A \Rightarrow \lambda_W \leq \lambda_i \leq \lambda_E \wedge \varphi_S \leq \varphi_j \leq \varphi_N, \tag{3}$$

则称 $\lambda_i \in A$ 的下界 λ_W 为 A 的西边界; λ_i 的上界 λ_E 为 A 的东边界; $\varphi_j \in A$ 的下界 φ_S 为 A 的南边界; φ_j 的上界 φ_N 为 A 的北边界。

A 的边界为 A 的导集, 表现为 $\lambda_W, \lambda_E, \varphi_S$ 和 φ_N 的并集:

$$BdA = A' = \lambda_W \cup \lambda_E \cup \varphi_S \cup \varphi_N. \tag{4}$$

由于 A 包含导集 A' , 故 A 为闭集, 从而使 A 内的一切线段, 均属有限闭区间。

2.2 有限闭区间的基数为连续统势

定义4 基数或势 对于每个集合 A , 给它一个记号 $\text{card } A$, 使得当且仅当集合 $B \sim A$ 时, 才有 $\text{card } A = \text{card } B$, 那么, $\text{card } A$ 就叫做集合 A 的基数或势, 也叫做 A 的元素个数。

定义5 等势 设 A 与 B 表示任意两个集合。如果存在着 A 到 B 上的一个双—函数, 就称集合 A 与集合 B 对等或等势, 记作: $A \sim B$ 。

定义6 连续统的势 单位区间 $I = [0, 1]$ 的基数称为连续统的势, 记作 $\text{card } I = c$ 。

设 $[a, b]$ 为有限闭区间(非退化区间), a, b 为实数。实数是有理数与无理数的总称。实数之间可

以进行加、减、乘、除(除数不为零)的运算, 并且满足通常的运算规律(交换、分配、结合律), 即实数全体构成一个域。运算结果显然有

$$[a, b] \Rightarrow [0, (b - a)] \Rightarrow [0, 1]. \tag{5}$$

从式(5)可见, 任何有限闭区间(非退化区间)均具有连续统的势^[11]。由此得下列蕴涵关系:

$$\begin{aligned} A \approx f(A) \Rightarrow l \approx f(l) \Rightarrow l \times l \approx f(l) \times f(l) \Big| \\ l \in A \wedge f(l) \in f(A). \end{aligned} \tag{6}$$

2.3 $A \in (S^2 - \{z\})$ 在 R^2 的投影 $f(A) \in R^2$ 的非空集性质的逻辑必然性

可视化是地图学的核心。图式规定地图上的点大为 0.15 mm, 线划不能细于 0.1 mm, 两个符号的间距不能小于 0.2 mm, 这些阈值的规定, 都在于确保地图符号的可视化^[12-15]。这些阈值表明, 地图上使用的“有限闭区间”与数学上定义的“有限闭区间”更为直观和易于理解。任何地图都不会是单一的某个符号, 而是符号的集合, 这符号集以图廓线为其边界, 可见“有限闭区域”是地图的共有属性。 $\forall f(l) \in f(A)$, 都存在于有限闭区域之中。 $f(A)$ 的“有限闭区域”性质, 说明 $A \in (S^2 - \{z\})$ 在 R^2 的投影 $f(A) \in R^2$ 必须为非空集, 即 $f(A) \neq \emptyset \in R^2$ 是地图投影必须满足的充要条件。

在式(6)中, 当 $l \times l$ 为 A 中的经纬网时, $f(l) \times f(l)$ 即为它在 $f(A)$ 中的投影。 A 的同胚像 $f(A)$ 及 $f(l) \times f(l) \in f(A)$ 无限多。

2.4 $A \in (S^2 - \{z\})$ 在 R^2 的投影 $f(A) = \emptyset$ 的谬误性

$A \in (S^2 - \{z\})$ 在 R^2 的投影不可能为空集, 可证明如下:

① 由定义6可知, 任何有限闭区间(非退化区间)均具有连续统的势, 即 $\text{card } I = c$ 。空集的基数为 0, 即 $\text{card } \emptyset = 0$, 两个集合不等势, 不满足同胚条件;

② 区间长度为 0 的区间称为“退化区间”, 有限闭区间为非退化区间, 两者具有相反的性质, 如果 $f(A) = \emptyset$ 的存在合理, 无异于“是 = 非”或“任意两实数 a 与 b 之差均为 0”的命题成立。这两命题的谬误是显然的, 从而证明 $f(A) = \emptyset$ 不可能。

2.5 约当曲线定理

定理1 约当曲线定理 设 J 是欧氏平面 R^2

上的点集,它是圆周的同胚像(称为约当闭曲线),则 $R^2 - J$ 必由两个连通分支组成,以 J 作为与它们的公共边界^[16]。

显然,地图 $f(A)$ 的边界就是约当曲线 J ,它将欧氏平面 R^2 分为图内和图外两个连通区域。任意的约当闭曲线 J ,都是 $A \in (S^2 - \{z\})$ 在 R^2 的同胚像,从而使 $\forall f(l) \in f(A)$ 为 $l \in A$ 的同胚像。 A 的同胚像 $f(A)$ 及 $f(l) \times f(l) \in f(A)$ 无限多,即满足双一一函数关系的图形无限多,这是球面上有确定边界的 $A \in (S^2 - \{z\})$ 可在不同的 $f \supset f_1, f_2$ 下使 $f(A)$ 变换为多种多样形状特征的投影网格的拓扑学基础。在建立从 A 到 $f(A)$ 的函数关系时,一般按“定形”、“定性”、“定尺度”3个条件来建立,由于3个条件的组合无限多,从而使设计方案无限多^[17]。

3 地图投影的多样性示例

3.1 正轴、横轴、斜轴方位投影、圆锥投影和圆柱投影

地图投影的分类,基本上可通过投影过程某种标志或特征的差异度来进行分类。例如,根据投影面是平面、圆锥面和圆柱面,可分为方位投影、圆锥投影和圆柱投影(图1~图3)。这3种地图投影,再根据投影中心或中心轴与地轴的相对位置,又可分为正轴(中心轴与地轴重合)投影、横轴(中心轴与地轴正交)投影和斜轴(中心轴与地轴斜交)投影。根据投影的变形性质,可分为等角投影、等



图1 正轴、横轴、斜轴方位投影
Fig. 1 Diagrammatic sketch of azimuthal projection of normal, transverse and oblique



图2 正轴、横轴和斜轴圆锥投影
Fig. 2 Diagrammatic sketch of conic projection of normal, transverse and oblique

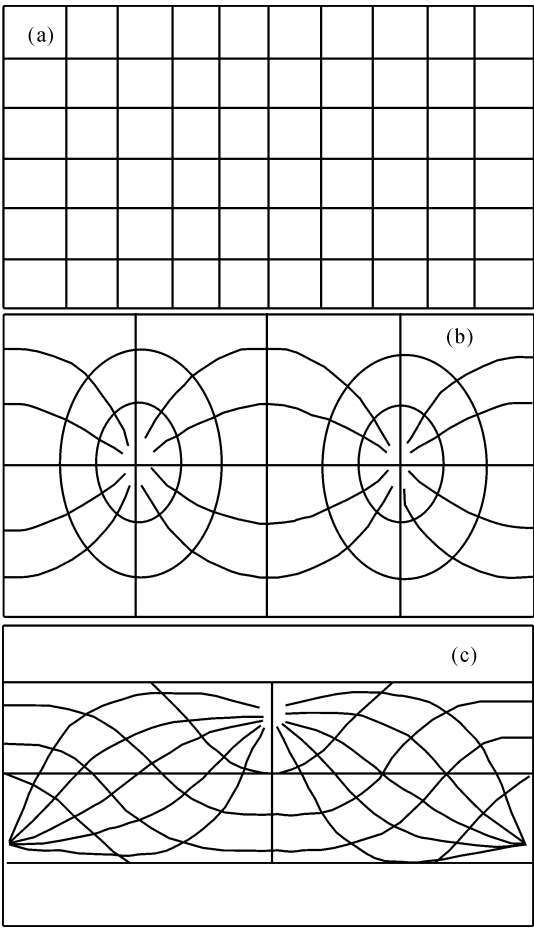


图3 正轴、横轴、斜轴圆柱投影
Fig. 3 Diagrammatic sketch of cylindrical projection of normal, transverse and oblique

积投影和任意投影。根据投影面与地球面相切或相割,可分为相切型和相割型投影等。

3.2 古德分瓣投影

古德分瓣法表示的摩尔威得投影,是将若干经线在南北半球分别采用不同的参数建立曲线方程,并使它们在赤道处圆滑连接,它具有使大陆部分变形较小,但海洋被割裂表示的特点(图4)。

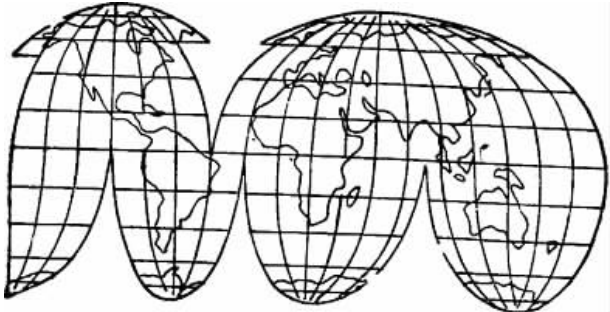


图4 用古德分瓣法绘制的摩尔威得投影世界地图
Fig. 4 World map of mollweide projection with Goode interrupted method mapping

3.3 若干具有奇异美感的地图投影

美国地图学会地图投影委员会 Robinson A H 等撰写的《如何按需求配置地图投影》(胡毓钜等译, 龚剑文校), 展示了若干鲜为人知的地图投影, 这些投影的形状及其处理手法独特奇异。以南极为中心的哈默等面积分瓣投影 (Spilhaus 和 Snyder, 1991), 以岸线来取代通常作为投影边界的弯曲的经线, 这种处理也显出一种奇异美 (图 5); 以南极为中心的近似等面积分瓣投影 (Spilhaus, 1979), 收到世界陆地包围世界海洋的奇异效果 (图 6); 一种分割的以南极为中心的横轴正弦曲线等面积分瓣投影 (Spilhaus, 1990) 把 7 个主要地壳板块制图成一种能够比较面积并合理地保持板块的形状, 这种处理方法和形象都堪称奇异^[18-19] (图 7)。

3.4 地图投影的新定义

数学模型就是用简单的数学语言, 对原型的某些本质特征或基本过程在定性分析的基础上, 从数量方面进行描述并使之适合数学工具进行操作的一种符号——结构模型^[20]。在圆锥投影、圆柱投影、方位投影、伪圆锥投影、伪圆柱投影、伪



图 5 以南极为中心的哈默等面积分瓣投影 (Spilhaus 和 Snyder, 1991)
Fig. 5 Hammers equivalent interrupted projection in the center at South Pole



图 6 以南极为中心的近似等面积分瓣投影 (Spilhaus)
Fig. 6 Similar equivalent interrupted projection in the center at South Pole



图 7 一种分割的以南极为中心的横轴正弦曲线等面积分瓣投影 (Spilhaus, 1990)
Fig. 7 Equivalent interrupted projection of transverse sine curve in the center at South Pole

方位投影和多圆锥投影中, 这种数学模型极为普遍。凡是能对地图投影的网格特征和构成规律加以刻划和描述的数学形式, 都属于地图投影的数学模型。例如, 从不同经纬线类型组合的角度, 可以给出地图投影的新定义^[21]; 对曲线的自然方程, 从经线曲率变化的规律, 也可以给出地图投影的新定义^[22]。地图投影的数学模型与地图投影的定义等价。

4 结束语

“刺孔球面” $(S^2 - \{z\})$ 与二维平面 R^2 之间满足拓扑映射 (同胚) 的定义, 从而使 $A \in (S^2 - \{z\})$ 与 $f(A) \in R^2$ 同胚, 即 $(S^2 - \{z\}) \approx R^2$ 。由于球面上的任意制图区域 $A \in (S^2 - \{z\})$ 是有界的闭集, 它的“有限闭区域”的属性确定无疑, 从而使区域内的包括经纬线在内的一切线段 $l \in A$ 均属于“有限闭区间”。另一方面, $A \in (S^2 - \{z\})$ 的平面像 $f(A) \in R^2$ 的非空集性质, 在通过 $f(A) = \emptyset$ 的证伪后, $f(A) \neq \emptyset$ 的非空集性质也确定无疑, 从而使 $f(A) \neq \emptyset$ 也属“有限闭区域”。一维的“有限闭区间”从属于二维的“有限闭区域”。“有限闭区间” $[a, b]$ 为非退化区间, 都具有连续统的势。 $f(A)$ 的边界为约当闭曲线, 闭合曲线的任意性, 为建立多种类型的地图投影提供了理论基础和数学工具。具体的 $f \supset f_1, f_2$ 的函数形式表现为满足同胚关系的经纬网结构。本文用正轴、横轴、斜轴的方位投影、圆锥投影、圆柱投影、古德分瓣投影和若干具有奇异美感的地图投影示例, 说明建立在“刺孔球面” $(S^2 - \{z\})$ 与二维平面 R^2 同胚基础上的地图投影, 具有巨大的创新设计空间。“刺孔球面” $(S^2 -$

$\{z\}$) 与二维平面 R^2 同胚的关系, 是各种地图投影共有的更基本的属性。

参考文献:

- [1] 丹尼尔·卡拉曼尼 (Daniele Caramani). 基于布尔代数的比较法导论 [M]. 蒋勤, 译. 上海: 格致出版社, 上海人民出版社, 2012: 49-52.
- [2] 李占元, 李景文, 张卫京, 等. 地理变量量表的数学定义 [J]. 桂林工学院学报, 2005, 25 (1): 65-67.
- [3] 钟业勋, 吴丽芳, 胡宝清. 关于比率量表可以表达为间距量表、顺序量表和定名量表的数学证明 [J]. 桂林理工大学学报, 2011, 31 (1): 96-99.
- [4] 钟业勋, 魏文展, 李占元. 基本地貌形态数学定义的研究 [J]. 测绘科学, 2002, 27 (3): 16-18.
- [5] 钟业勋, 胡宝清, 朱根雄. 基本地貌形态数学定义体系研究 [J]. 桂林工学院学报, 2009, 29 (4): 481-484.
- [6] 钟业勋, 胡宝清, 王欢. 基于约束变换的地图符号新定义 [J]. 桂林理工大学学报, 2013, 33 (3): 509-512.
- [7] 童新华, 韦杰文, 钟业勋, 等. 概念的派生逻辑及其在测绘学中的应用 [J]. 桂林理工大学学报, 2013, 33 (1): 86-89.
- [8] 葛能全. 科学技术发现发明纵览 [M]. 北京: 科学出版社, 1986: 316-317.
- [9] 胡毓钜, 龚剑文. 地图投影 [M]. 2版. 北京: 测绘出版社, 1992.
- [10] 陆淑芬, 陈由基, 王近仁, 等. 地图学基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1987.
- [11] 李孝传, 陈玉清. 一般拓扑学导引 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1982.
- [12] 钟业勋, 胡宝清. 地图空间认知过程的理论阐释 [J]. 桂林理工大学学报, 2013, 33 (2): 307-311.
- [13] 钟业勋, 朱重光, 童新华. 地图表示的物质基础及时空尺度研究 [C] // 第二届测绘科学前沿技术论坛论文集. 北京: 测绘出版社, 2010: 279-281.
- [14] 钟业勋, 童新华. 基于可视化的地图学概念的形成逻辑 [J]. 海洋测绘, 2012, 32 (4): 78-80.
- [15] 钟业勋, 朱重光, 童新华, 等. 地图可视化与地图学概念的相关性研究 [J]. 玉林师范学院学报, 2012, 33 (2): 146-149.
- [16] 谷超豪. 数学词典 [M]. 上海: 上海辞书出版社, 1992: 242.
- [17] 吴忠性, 杨启和. 数学制图学原理 [M]. 北京: 测绘出版社, 1989: 1-6.
- [18] 钟业勋. 数理地图学——地图学及其数学原理 [M]. 北京: 测绘出版社, 2007: 83-88.
- [19] 钟业勋, 胡毓钜, 乔俊军. 地图投影的科学美与艺术美 [J]. 海洋测绘, 2012, 32 (2): 75-78.
- [20] 章士嵘. 科学发现的逻辑 [M]. 北京: 人民出版社, 1986: 140-146.
- [21] 钟业勋, 胡毓钜, 童新华. 基于不同经纬线类型组合的地图投影新定义 [J]. 海洋测绘, 2012, 32 (6): 13-16.
- [22] 钟业勋, 童新华, 李占元. 若干常规地图投影的新定义 [J]. 桂林理工大学学报, 2011, 31 (3): 391-394.

Topologic principle in mapping projection

ZHONG Ye-xun^{1,2}, TONG Xin-hua¹, WEI Qing-yuan², LIU Run-dong²

(1. School of Resource and Environment Science, Guangxi Teachers' College, Nanning 530001, China; 2. Guangxi Regional Geographical Information Bureau of Surveying and Mapping, Nanning 530023, China)

Abstract: According to the definition of topological mapping, the quality of homeomorphism of sting-out sphere ($S^2 - \{z\}$) is put up with two-dimensional plane R^2 . The $f(A)$ is deduced as a nonempty set according to the topologic principles of finite closed interval and equipollence to each other. The boundary of $f(A)$ is a Jordan closed curve on 2D plan. With the randomness of Jordan closed curve and different topologic transform rules, $f(A)$ can be random shape and construct various projection grids. The new method of $f \supset f_1, f_2$ function is showed by examples.

Key words: map projection; topologic mapping; sting-out sphere; two-dimensional (2D) plan; homeomorphism; Jordan curve