

GPS 高程拟合的不同估计方法比较

唐诗华, 袁隆疆, 王江波, 肖 阳, 蒲 伦

(桂林理工大学 a. 广西空间信息与测绘重点实验室; b. 测绘地理信息学院, 广西 桂林 541004)

摘 要: 通过 GPS 高程异常平面拟合实例, 系统地介绍了最小二乘估计、总体最小二乘估计、稳健最小二乘估计、稳健总体最小二乘估计、半参数估计等 5 种估计方法的原理和特点, 比较了它们的识别模型参数、减弱系统误差、抵御粗差和不同类型误差的能力。结果表明: 总体最小二乘估计在 GPS 高程拟合中稳定性较弱, IGGⅢ抗差方案会放大随机模型误差对平面拟合模型的影响, 半参数估计只有在系统误差存在下与最小二乘估计参数值相差大, 最小二乘估计在高程拟合中精度最高。

关键词: 稳健总体最小二乘估计; 半参数估计; GPS 高程异常拟合; 适用范围; 最优估计
中图分类号: P228.9 **文献标志码:** A

在 GPS 高程拟合方法选取中通常只注意到测区的范围和地形起伏情况^[1], 但在选定模型后, 应使用何种估计方法却少有研究。在 GPS 高程拟合中常未注意所测位置误差信息, 当位置信息包含误差时, 计算高程异常值也会有误, 总体最小二乘估计兼顾系数矩阵和观测矩阵误差的影响, 拟合方程包含位置信息误差, 已经引起广泛的研究^[2]。总体最小二乘算法会成倍增加模型未知参数, 这会导致模型的计算效率和稳定性降低^[3], 已有实验表明总体最小二乘估计还存在估值漂移现象^[4]。在 GPS 高程异常观测值中不仅包含偶然误差, 同时还可能包含系统误差和粗差。半参数估计对实际问题的解释能力更强, 在处理系统误差方面得到了广泛应用^[5]。当观测方程中含有粗差时, 常根据等价权原理重新定权, 但等价权原理可能放大随机模型误差对算法的影响, 算法的有效性值得商榷^[6]。最小二乘估计是测量中最常用的估计方法, 其估计方法未知参数最少, 但容易受到观测值中误差大小和分布情况影响^[7]。

不同的估计方法常具有各自特点和适用范围, 为了综合比较最小二乘估计 (LS)、总体最小二乘估计 (TLS)、稳健最小二乘估计 (LS-IGGⅢ)、稳健

总体最小二乘估计 (TLS-IGGⅢ)、半参数估计方法在 GPS 高程拟合中的有效性和可靠性, 本文对上述 5 种估计方法的原理和特点进行了比较, 通过 GPS 高程异常平面拟合工程实例, 在控制点中分别加入粗差、系统误差、正态分布随机误差, 泊松分布随机误差等, 计算和评价了各估计方法的精度。

1 估计方法

1.1 平面拟合的最小二乘估计

设某公共点的高程异常值为 l_i , 其对应的平面坐标为 (x_i, y_i) , n 个点相应的误差方程为

$$v_i = a + bx_i + cy_i - l_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

式中: a 、 b 、 c 为待定参数; v_i 表示改正数, 表示成矩阵形式为

$$V = AX - L, \quad (2)$$

其中

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{bmatrix}。$$

根据最小二乘原理, $X = (A^T P A)^{-1} A^T P L$, 其中 P 为权阵, 根据水准高程或 GPS 所测得的大地

高精度来确定。常用字母 LS 表示最小二乘估计。

1.2 稳健总体最小二乘估计

变量误差模型 (errors-in-variable, EIV) 误差模型为

$$\mathbf{L} + \mathbf{e}_L = (\mathbf{A} + \mathbf{E}_A)\mathbf{X}, \quad (3)$$

其中: \mathbf{e}_L 表示观测值的误差; \mathbf{E}_A 表示系数矩阵的误差。若 $\mathbf{e}_A = \text{vec}(\mathbf{E}_A)$, 其中 $\text{vec}(\cdot)$ 表示拉直运算。

误差随机模型为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_L \\ \mathbf{e}_A \end{bmatrix} \propto N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_A \end{bmatrix}\right). \quad (4)$$

在此 GPS 高程平面拟合中, 观测向量与系数矩阵的权矩阵的初始值均取为单位 1, 则此时估计方法退化为等价权估计^[6]。式(3)为线性方程, 则可令观测向量协方差矩阵为 n 阶单位矩阵 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$, $\mathbf{Q}_A = \mathbf{Q}_a \otimes \mathbf{Q}_0$, 其中 $\mathbf{Q}_a = \mathbf{I}_n$, \mathbf{Q}_0 为 3 阶协方差矩阵。注意到系数矩阵 \mathbf{A} 的第一列全为常数 1, 无需对第一列进行改正, 此时 $\mathbf{Q}_0 = \text{diag}(0, 1, 1)$ 。此估计方法称为部分变量总体最小二乘估计 (PTLS)。总体最小二乘约束准则为

$$\mathbf{e}_A^T (\mathbf{Q}_a \otimes \mathbf{Q}_0)^{-1} \mathbf{e}_A + \mathbf{e}_L^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e}_L = \min. \quad (5)$$

构造 Lagrang 目标函数:

$$\Phi(\mathbf{e}_L, \mathbf{e}_A, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{X}) = \mathbf{e}_A^T (\mathbf{Q}_a \otimes \mathbf{Q}_0)^{-1} \mathbf{e}_A + \mathbf{e}_L^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e}_L + 2\boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{L} + \mathbf{e}_L - \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{E}_A\mathbf{X}), \quad (6)$$

分别对 \mathbf{e}_L 、 \mathbf{e}_A 、 $\boldsymbol{\lambda}$ 、 \mathbf{X} 进行求导。详细情况见文献[7], 设未知参数 X_i 表示第 i 次迭代计算结果,

$$\lambda_i = (\mathbf{Q} + \mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{X}_i \mathbf{Q}_a)^{-1} (\mathbf{L} - \mathbf{A}\mathbf{X}_i); \quad (7)$$

$$v_i = (\mathbf{L} - \mathbf{A}\mathbf{X}_i)^T (\mathbf{Q} + \mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{X}_i \mathbf{Q}_a)^{-1} \mathbf{Q}_a (\mathbf{Q} + \mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{X}_i \mathbf{Q}_a)^{-1} (\mathbf{L} - \mathbf{A}\mathbf{X}_i); \quad (8)$$

$$X_{i+1} = (\mathbf{A}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{X}_i \mathbf{Q}_a)^{-1} \mathbf{A} - v_i \mathbf{Q}_0)^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{Q} + \mathbf{X}_i^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{X}_i \mathbf{Q}_a)^{-1} \mathbf{L}; \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_L = \mathbf{Q}\boldsymbol{\lambda}_i; \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_A = -(\mathbf{Q}_0 \mathbf{X}_i \otimes \mathbf{Q}_a) \boldsymbol{\lambda}_i. \quad (11)$$

在求解未知数据 \mathbf{X} 时, 如果使用总体最小二乘估计, 则不断重复式(7) ~ (9), 直到 $\|\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i\| < \varepsilon$, 迭代结束, 若使用稳健最小二乘估计, 则需要重复式(7) ~ (11), 具体计算如下:

稳健总体最小二乘是根据 $\hat{\mathbf{e}}_L$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_A$ 的大小, 确定观测向量和系数矩阵相应的权值。常用的抗差方案有 Huber 法、IGG III 法、丹麦法等, 已有实验表明, IGG III 抗差方案在 GPS 高程拟合中计算结果更佳^[8]。因此本文的抗差方案也是基于 IGG III 法的。令 $\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$, $\mathbf{P}_A = \mathbf{Q}_A^{-1}$, 则 IGG III 抗差方案的权因子

取值为

$$\bar{P}_i = \begin{cases} P_i, & |v| < b; \\ P_i \frac{b}{|v|} \left(\frac{c - |v|}{c - b} \right)^2, & b \leq |v| < c; \\ 0, & |v| \geq c. \end{cases} \quad (12)$$

其中: 当 P_i 表示第 i 点观测向量的权值时, 则 v 表示观测向量标准化残差 ($v_{Li} = |\mathbf{e}_{Li}|/\sigma_1$, \mathbf{e}_{Li} 为 $\hat{\mathbf{e}}_L$ 中的第 i 个数, σ_1 表示观测向量中误差)。当 P_i 表示第 i 点系数向量权值时, 则 v 表示系数向量标准化残差 ($v_{Ai} = |\mathbf{e}_{Ai}|/\sigma_2$, \mathbf{e}_{Ai} 为 $\hat{\mathbf{e}}_A$ 中的第 i 个数, σ_2 表示系数矩阵中误差)。经验上常令^[9] $b = 1.5$, $c = 3.0$ 。将重新定义好的权值 \bar{P}_i 代入式(7) ~ (11), 直至 $\|\mathbf{X}_{i+1} - \mathbf{X}_i\| < \varepsilon$ 迭代结束。

1.3 半参数估计

半参数模型包含参数分量和非参数分量, 克服了参数和非参数模型表达不完善的缺点。半参数模型增加了数据处理模型的适用性, 能够更真实地描述实际问题, 具有极强的解释能力。常用来提取系统误差, 或者处理观测量与待估参数之间的复杂关系。

半参数模型的形式通常为

$$\mathbf{L} + \mathbf{e}_L = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{S}. \quad (13)$$

随机模型为 $E(\mathbf{e}_L) = 0$, $D(\mathbf{e}_L) = \sigma_0^2 \mathbf{Q} = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}$ 。 \mathbf{S} 表示观测方程中的系统误差向量, 其余向量表示意义与上述相同。

按照补偿最小二乘原理估计准则

$$\mathbf{e}_L^T \mathbf{P} \mathbf{e}_L + \alpha \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{R}^T = \min, \quad (14)$$

式中: α 为平滑因子, 在极小化过程中在 \mathbf{e}_L 和 \mathbf{S} 之间起平衡作用; \mathbf{R} 为一个适当给定的正定矩阵, 称为正规化矩阵, \mathbf{R} 的选取有自然样条函数法、时间序列法、距离法。构造 Lagrang 目标函数如下:

$$\Phi(\mathbf{e}_L, \mathbf{S}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{X}) = \mathbf{e}_L^T \mathbf{P} \mathbf{e}_L + \alpha \mathbf{S}^T \mathbf{R} \mathbf{S} + 2\boldsymbol{\lambda}^T [\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{X} - \mathbf{L} - \mathbf{e}_L], \quad (15)$$

分别令 $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{e}_L} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{S}} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\lambda}^T} = 0$, 按文献[5]可得

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}) \mathbf{L}, \quad (16)$$

其中: $\mathbf{F} = \mathbf{P} + \alpha \mathbf{R} - \mathbf{P} \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$, 且为正定矩阵, 则

$$\mathbf{X} = (\mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} (\mathbf{L} - \mathbf{S}). \quad (17)$$

平滑因子 α 为平衡参数, 其选取办法有信噪比法、L 曲线法, 交叉核实法以及广义交叉核实法

等,其中能适用于各种情况的方法是 L 曲线法。因此,本文选用 L 曲线法确定平滑因子 α 。因为 GPS 高程值与位置点有关,因此,本文选用距离法来确定正规化矩阵 \mathbf{R} , A 、 B 两点的距离用 S_{AB} 表示,具体为^[10]

$$\mathbf{R}^{-1} = (S_{AB})_{n \times n}, S_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}。$$

(18)

2 精度公式

GPS 高程异常拟合值为 l_1, l_2, \cdots, l_n , 其 GPS 大地高和正常高的差值为 $\hat{l}_1, \hat{l}_2, \cdots, \hat{l}_n$, 高程异常真误差为 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$, 有

$$\Delta_i = \hat{l}_i - l_i, i = 1, 2, \cdots, n。$$

(19)

由于各观测为独立等精度观测,因此 l 的中误差 σ 为

$$\sigma = \sqrt{(\sum_{i=1}^n \Delta_i \Delta_i)/n}。$$

(20)

当对某块地形的高程异常数据进行了 m 次模拟仿真实验,获得多个中误差值 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_m$, 则 l 中误差的平均值 M 为

$$M = (\sum_{i=1}^m \sigma_i)/m。$$

(21)

3 实例分析

为验证各估计方法的有效性,本文以文献[11] 高程拟合观测数据中的 19 个控制点数据进行平面拟合计算。每个控制点都存在高程异常拟合值,需要求解最佳平面拟合参数。各控制点平面坐标和高程异常见表 1, 各控制点高程异常值的等高线图见图 1。各点高程异常值基本呈线性分布,规律性较强,可以使用平面拟合方式。使用前 19 个高程控制点求解的高程平面拟合未知参数、拟合值中误差结果见表 2。

在上述 5 种估计方法中,最小二乘估计中的未知参数为 3 个;半参数估计中未知参数为 $19 + 3 = 22$ 个;总体最小二乘估计中未知参数为 $3 \times 19 + 3 = 60$, 可知总体最小二乘估计未知参数会成倍增加。LS 估计中误差最小,而含有 IGG III 抗差方案的 LS-IGG III 和 PTLS-IGG III 估计中误差明显大于不含 IGG III 抗差方案的估计方法,说明 IGG III 抗差方案可能会放大随机模型误差对算法的影响,致使未知参数估值可靠性降低。半参数模型、TLS、LS 估计参数估值基本相同,这表明当 GPS 观测异常观

表 1 控制点平面坐标和高程异常值

Table 1 Plane coordinates and height anomaly value in each control point

编号 控制点	坐标/m		l/m
	x	y	
1	897.405	222.838	5.764 6
2	898.414	245.022	9.854 0
3	884.297	247.038	8.268 0
4	888.330	260.146	10.939 8
5	833.881	286.363	9.532 7
6	855.056	278.296	10.273 9
7	865.139	253.088	6.768 2
8	847.997	253.086	4.538 6
9	839.931	258.130	4.611 2
10	815.731	272.246	4.882 5
11	805.648	269.221	3.313 7
12	821.781	293.421	9.605 6
13	805.648	303.504	9.980 6
14	794.556	279.304	4.393 3
15	917.572	193.597	2.013 3
16	917.572	233.930	10.478 1
17	841.948	309.554	13.677 8
18	866.147	279.304	11.104 0
19	930.680	216.789	9.690 8

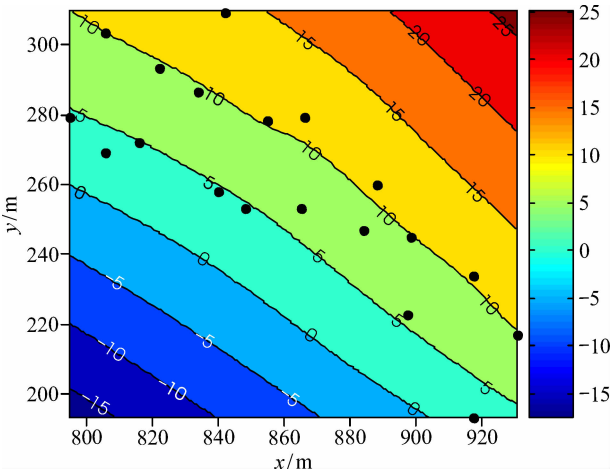


图 1 各控制点高程异常值的等高线

Fig. 1 Contour map of height anomaly value in each control point

表 2 各估计方法的参数估值和拟合值中误差

Table 2 Parameters evaluation and root mean square error on various estimation methods

估计模型	拟合参数			中误差 σ
	a	b	c	
LS	-135.571 1	0.114 2	0.173 6	0.576 7
TLS	-141.300 1	0.119 1	0.179 7	0.588 8
LS-IGG III	-139.105 3	0.114 8	0.185 1	0.658 4
PTLS-IGG III	-130.200 0	0.107 9	0.173 3	0.645 9
半参数	-135.084 6	0.113 9	0.172 7	0.583 2

测值中所含误差较小时,这 3 种估计方法具有相同的估计效果。为比较这 5 种估计方法在 GPS 高程异常平面拟合中快速识别模型参数、减弱系统误差、抵御粗差和不同类型误差的能力,寻找最优估计方法,特进行如下实验。

方案 1:用前 11 位~前 18 位控制点数据进行平面拟合,比较各估计方法快速识别模型参数能力。

方案 2:使用前 16 位控制点数据,在第 5、6、7、8 位坐标值中引入粗差,并令第 6 位高程异常值误差增加大小从 0~10 逐渐变化,步长为 0.05 m,比较各估计方法抵御粗差的能力。

方案 3:在前 14 位控制点中的高程异常值中分别加入正态分布 $N(0,1)$ 和泊松分布 $\pi(1)$ 的随机误差,重复实验 200 次,比较各估计方法抵御不同类型随机误差的能力。

方案 4:在前 14 位控制点 x 、 y 坐标中加入泊松分布 $\pi(5)$ 的随机误差,并在每一位高程异常值中增加从 0~2 逐渐变化、步长为 0.01 m 的常数系统误差,并比较各估计方法抵御系统误差的能力。

3.1 方案 1：快速识别拟合参数比较

表 3 为使用不同数量的控制点进行平面拟合时各估计方法中误差大小的比较。可知,当高程异常点的数据量减少时,各估计方法中误差也变小。控制点数量变化时,LS 估计中误差一直为最小,而 LS-IGGⅢ估计一直为最大,这表明在本次控制点数据中,IGGⅢ抗差方案扩大了随机模型误差对参数的影响,计算结果可靠性降低。其原因可能为 IGGⅢ抗差方案中初值和阈值设置不当。而 TLS 估计方法的预测精度要低于 LS,这说明总体最小二乘虽然进行了系数矩阵误差改正,但同时也使模型的参数增加,致使模型的稳定性和可靠性降低。有实验表明 LS 估计和 TLS 估计的选取应根据系数矩阵信噪比^[3]。由本文实例可知,当模型中含有较小偶然误差时,LS 估计方法能够准

确地识别模型参数,IGGⅢ抗差方案会扩大随机模型误差对参数的影响,模型未知参数的增加会降低结果的可靠性,因此应选用 LS 估计。

3.2 方案 2：各估计方法抵御粗差的能力比较

当使用前 16 位控制点进行拟合,并在 5、6、7、8 位控制点中引入粗差。其中,第 5 位 x 坐标中加入 10 m 粗差,第 6 位 l 中加 10 m 粗差,第 7、8 位 y 坐标值分别加入 -10 和 20 m 粗差。预测结果见表 4 中的实验 1。实验 2 表示第 5、7、8 位控制点中 x 、 y 坐标值粗差大小保持不变,但第 6 位高程异常值误差增加大小从 0~10 逐渐变化,步长为 0.05 m。实验 2 是为了比较在不同粗差大小情况下中误差变化详细情况,其中误差均值 M 见表 4,变化情况见图 2。

当平面拟合模型含有粗差时,TLS 估计受粗差影响较大,拟合精度和预测精度较低,这表明 TLS 估计对粗差敏感,模型不稳定,不具有抵御粗差影响的能力^[12]。图 2 详细表示了各估计方法中误差变化情况,随着高程异常观测值误差的增加,LS、TLS 和半参数估计中误差也持续增加,但 TLS 增加速率最大。LS 和半参数估计中误差增加速率基本相同,这表明 LS 和半参数模型在一定程度上受粗差的影响。LS-IGGⅢ和 PTLs-IGGⅢ估计方法在粗差增大时,其中误差并不发生变化。因此,当 GPS 控制点中含有粗差时,IGGⅢ抗差方案能

表 4 各模型拟合精度和预测精度对比 (含粗差)

Table 4 Comparison of accuracy among various estimation methods (including gross error)				
方案	实验 1		实验 2	
	拟合 σ	预测 σ	拟合 M	预测 M
LS	1.535 3	1.076 5	1.304 8	0.725 0
TLS	3.119 4	2.604 5	1.942 3	1.450 7
LS-IGGⅢ	1.238 9	0.634 0	1.243 3	0.628 2
PTLS-IGGⅢ	1.253 2	0.623 7	1.253 0	0.636 3
半参数	1.539 6	1.081 6	1.300 3	0.714 6

表 3 不同数量高程异常点不同估计方法中误差比较

Table 3 Comparison of accuracy on various estimation methods under different points

估算方案	控制点个数							
	1 ~ 18	1 ~ 17	1 ~ 16	1 ~ 15	1 ~ 14	1 ~ 13	1 ~ 12	1 ~ 11
LS	0.480 5	0.462 2	0.396 5	0.351	0.362 3	0.332 5	0.298 6	0.291 5
TLS	0.487 6	0.468 5	0.400 9	0.354 4	0.366 3	0.335 8	0.300 9	0.293 6
LS-IGGⅢ	0.537 4	0.525 8	0.421 2	0.359 7	0.495 8	0.471 9	0.348 4	0.341 0
PTLS-IGGⅢ	0.493 0	0.487 7	0.409 8	0.351 0	0.362 3	0.332 5	0.298 6	0.300 6
半参数	0.483 0	0.464 0	0.402 4	0.354 8	0.373 2	0.339 9	0.305 5	0.301 6

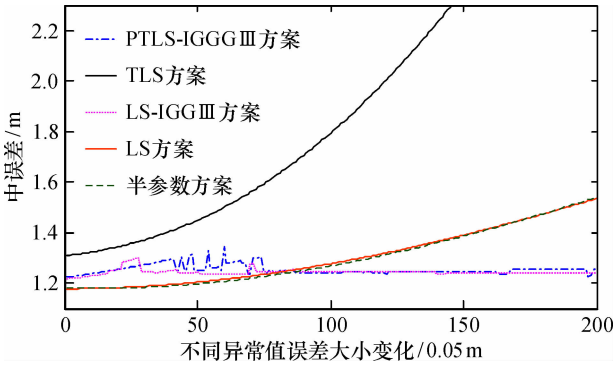


图2 不同误差大小下各估计方法中误差变化图

Fig. 2 Root mean square error changes under different types of errors

够抵御粗差对估计模型精度的影响，TLS 估计对粗差敏感，模型稳定性降低，而 LS 和半参数估计在一定程度上受粗差影响。

3.3 方案3：不同类型误差分布对估计值的影响比较

方案3中，在前14位GPS高程异常值中分别加入正态分布 $l_i \in N(0, 1)$ 随机误差和泊松分布 $l_i \in \pi(1)$ 随机误差，并重复实验200次。各估计方法中误差平均值 M 见表5，图3表示正态分布随机误差影响下各估计方法的中误差变化。

尽管两种不同类型误差的方差都为1，但正态分布误差对模型的影响明显要小于泊松分布随机误差。因此高程异常平面拟合更适用于随机误差服从正态分布情况。由图3可知，在正态误差分布条件下，LS中误差小于PTLS-IGG III和TS-IGG III模型，同时，LS-IGG III估计值具有较强的波动性，由表5和图3估计结果说明，高程异常平面拟更适用于随机误差服从正态分布情况，且LS估计在不同类型误差分布情况下，仍具有良好的精度。

3.4 方案4：抵御系统误差的能力比较

使用前14位控制点数据，在每个高程异常值点 x 、 y 坐标中加入泊松分布 $\pi(5)$ 的随机误差，并在每一位高程异常值中增加2m常数系统误差。

表5 不同类型误差对估值的影响

Table 5 Effect of valuation on different types of errors

方案	正态分布		泊松分布	
	拟合 M	预测 M	拟合 M	预测 M
LS	0.456 6	0.706 7	1.072 4	0.939 8
TLS	0.578 6	0.774 3	1.063 5	0.974 1
LS-IGG III	0.482 0	0.768 1	1.209 1	1.211 4
PTLS-IGG III	0.516 7	0.728 0	1.151 0	0.966 9
半参数	0.472 7	0.712 5	1.051 1	0.923 9

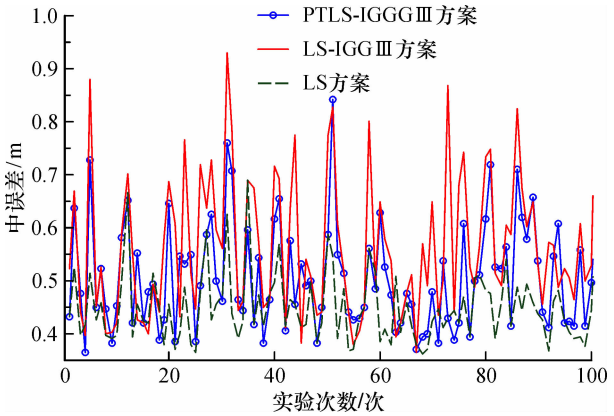


图3 前100次模型拟合中误差变化图（正态分布误差）

Fig. 3 Root mean square error changes on model fitting residual in first 100 times

其拟合中误差和预测中误差见表6中的实验1。实验2表示控制点 x 、 y 坐标中仍加入泊松分布 $\pi(5)$ 的随机误差，但每个高程异常值中都加入步长为0.01，从0~2 m逐渐变化的常数系统误差。

由表6可知，当系统误差存在时，半参数估计的中误差平均值 M 都为最小。由式(13)可知，半参数估计将误差进行分类，可以在一定程度上抵御系统误差影响。通过计算方案1~4中残差平方和发现：只有在方案4中LS残差平方和同半参数估计相差大，其余方案估计残差平方和都相差较小，这表明，当系统误差存在时，半参数估计优于LS估计，在其余误差影响下，其精度基本相同。

表6 系统误差大小对模型估计值精度影响

Table 6 System error size effects on model accuracy estimate value

估计模型	实验1		实验2	
	拟合 σ	预测 σ	拟合 M	预测 M
LS	2.032 6	1.318 1	1.099 5	0.901 6
TLS	2.032 3	1.352 3	1.100 5	0.933 1
LS-IGG III	2.051 0	1.358 6	1.070 1	0.936 7
PTLS-IGG III	2.032 6	1.318 1	1.099 5	0.901 6
半参数	1.933 3	1.265 5	1.021 3	0.871 0

4 总结与展望

通过GPS高程异常值平面拟合实例模拟分析，系统地比较了LS、TLS、LS-IGG III、TLS-IGG III和半参数模型的快速识别模型参数、减弱系统误差、抵御粗差和不同类型误差的能力，得到如下结论：(1)各观测值中只含有小误差时，LS估计方法所含未知参数只有3个，具有快速识别参数的能力、较

强的稳定性和可靠性。因初值或阈值设置不当,含有 IGG III 抗差方案会扩大模型随机误差对观测的影响,这会导致模型估计值误差增大。因此,当含有小误差时,宜用 LS 估计方法。(2)当高程异常值中含有粗差时,LS、TLS 和半参数模型不具备抗差性,预测值误差随粗差的增大而增大。TLS 成倍的增加了未知参数,致使了模型的稳定性降低,预测效果最差。而 LS-IGG III 和 PTLIS-IGG III 估计因含有抗差方案,降低了含有粗差项的权值,其预测值不随粗差大小的变化而改变,PTLIS-IGG III 估计精度优于 LS-IGG III 估计。(3)高程异常平面拟合更适用于随机误差服从正态分布情况,在不同的类型误差分布情况下,LS 估计仍具有最高预测精度。(4)当 GPS 高程异常值中含有系统误差,LS、TLS、LS-IGG III、PTLIS-IGG III 不具备抵御系统误差能力,半参数估计效果最佳。当系统误差存在时,LS 和半参数估计参数值相差大。

不同估计方法有各自的优缺点和适用范围,因此,在实际 GPS 高程异常值平面拟合中,应综合使用上述 5 种方法。首先使用 IGG III 抗差方案对高程异常点进行粗差探测,对含有进行粗差项进行改正;再使用 TLS 方法求解系数矩阵改正量 E_A ,如果系数矩阵改正量较大,则进行系数矩阵改正;然后比较 LS 和半参数估计值大小,当估值相差较大,表明含有系统误差,需要进行系统误差改正;最后在 LS 估计下求解高程异常值。

本文虽然研究了如何选择各估计方法,但并未定量研究如何选择最优估计方法,并且只是基

于本实例的研究,其普遍适用性还有待进一步研究论证。

参考文献:

- [1] 任超,梁月吉,蓝岚,等.不同组合方法对 GPS 高程拟合的影响[J].大地测量与地球动力学,2015,35(6):1036-1040.
- [2] 鲁铁定.总体最小二乘平差理论及其在测绘数据处理中的应用[D].武汉:武汉大学,2010.
- [3] 曾文宪.系数矩阵误差对 EIV 模型平差结果的影响研究[D].武汉:武汉大学,2013.
- [4] 董巧玲.不同误差影响模型下总体最小二乘法在多元线性回归中的应用研究[D].太原:太原理工大学,2013.
- [5] 潘雄.半参数模型的估计理论及其应用[D].武汉:武汉大学,2005.
- [6] 陶叶青,高井祥,姚一飞.基于中位数法的抗差总体最小二乘估计[J].测绘学报,2016,45(3):297-301.
- [7] 张腾旭,刘立龙,周森,等.基于最小二乘配置法的高程拟合及精度评定方法[J].桂林理工大学学报,2014,34(4):728-731.
- [8] Schaffrin B, Wieser A. On weighted total least-squares adjustment for linear regression[J]. Journal of Geodesy, 2008, 82(7):415-421.
- [9] 刘亚彬,郑南山,张旭,等. GPS 高程拟合的加权总体最小二乘抗差估计[J].大地测量与地球动力学,2016,36(1):30-34.
- [10] 龚循强,李志林.稳健加权总体最小二乘法[J].测绘学报,2014,43(9):888-894.
- [11] Li B F, Shen Y Z, Zhang X F, et al. Seamless multivariate affine error-in-variables transformation and its application to map rectification[J]. International Journal of Geographical Information Science, 2013, 27(8):1572-1592.
- [12] 邱卫宁,陶本藻,姚宜斌,等.测量数据处理理论与方法[M].武汉:武汉大学出版社,2008.
- [13] 赵俊,归庆明.部分变量误差模型的整体抗差最小二乘估计[J].测绘学报,2016,45(5):552-559.

Comparison of various estimation methods in GPS elevation fitting

TANG Shi-hua, YUAN Long-jiang, WANG Jiang-bo, XIAO Yang, PU Lun

(a. Guangxi Key Laboratory of Spatial Information and Geomatics; b. College of Geomatics and Geoinformation, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: The principles and characteristics of different estimation models which including least squares, total least squares, robust least squares, robust overall least squares and semi-parametric model are introduced to compare with the error value characteristics of GPS height. And robust overall least squares model is emphasized. The abilities of identifying model parameters, the attenuate systematic errors, resisting the gross error and different types are compared with these estimation models. The error value characteristics of GPS height results show that as the stability of the total least squares estimate is poor, the IGG III anti-difference scheme will magnify the error of random model on plane fitting model. There will be great difference between the semi-parametric model and the least squares estimate model in the presence of systematic errors. And the least squares estimate model has the highest fitting precision.

Key words: robust total least squares estimate; semi-parametric estimate; GPS elevation fitting; scope of application; optimal estimate