一类时滞 Logstic方程的正周期解及其渐近性

杨喜陶
(桂林工学院基础课部 541004)

摘 要 利用不动点定理得到了时滞 Logstic方程正周期解的存在性,用 Liapunov泛函证明了解的渐近性.

关键词 Logistic方程;时滞;泛函;算子
分类号 O177

考虑如下 Logistic方程

$$N'(t) = N(t)\left(a(t) - b\int_0^{\infty} k(s)N(t-s)\,ds\right) \tag{1}$$

及初始条件

$$N(t) = h(t),\ t\leqslant 0 \tag{2}$$

其中 $a(t)$ 为正的 T周期连续函数;b为正常数;$h(t)$为 $(-\infty, 0]$到 $[0,+\infty)$上的有界连续函数且 $h(0)>0$;$k(s)$: $[0,+\infty)\to[0,+\infty)$连续,且$\int_0^{+\infty} k(s)\,ds = 1$, $e = \int_0^{+\infty} sk(s)\,ds$

引理 1 X是 Banach空间,L是指标为 0的 Fredholm算子,K为 X的有界开集,N: $\bar{K}\to X$是 L紧,且满足

(i) $L(x)\neq\lambda N(x)$, $\forall x\in\partial\Omega\cap \mathrm{Dom}l$, $\lambda\in(0,1)$

(ii) $Q\cdot N(x)\neq\theta$, $\forall x\in\partial\Omega\cap \mathrm{Ker}l$

(iii) $\deg(QN, K\cap \mathrm{Ker}l, \theta)\neq 0$

则 $\exists x\in\Omega$ 使 $L(x)=N(x)$. 证明见文献 [1]

引理 2 令 $a^0=\sup\limits_{t\in R} a(t)$, $M_0 = a^0\left(b\int_0^{\infty} k(s)e^{-a^0 s}\,ds\right)^{-1}$, $N(t)$为(1)的解,则有 $\varlimsup\limits_{t\to\infty} N(t)\leqslant M_0$,证明见文献 [2].

1 周期解的存在性

定理 1 问题 (1)、(2) 至少存在一个 T周期解.

证:易知 (1)、(2) 的解在 $[0,+\infty)$ 上存在且为正[2],对 (1) 作变换 $N(t)=e^{x(t)}$,则 (1) 变为

$$x'(t) = a(t) - b\int_0^{+\infty} k(s)e^{x(t-s)}\,ds \tag{3}$$

令 $X=\{x(t)\in C(R,R)\ x(t+T)=x(t)\}$, $\forall x(t)\in X$定义范数 $\|x\| = \sup\limits_{t\in R}|x(t)|$,则 X

1996年 11月 6日收稿.
第一作者简介:杨喜陶,男,1963年出生,副教授,微分方程专业.

构成 Banach空间。定义 L: Dom$L \cap x \to X$ 为 $Lx = x'(t)$，易知 Ker$L = X/\mathrm{Im}L = R$，从而 L 为指标为 0的 Fredholm算子，定义投影算子 P，Q分别为：

$$P: x \cap \mathrm{Dom}L \to \mathrm{Ker}L,\quad Q: X \to X/\mathrm{Im}L$$

$$P(x) = Q(x) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t$$

令 $N: X \to X$，$N(x) = a(t) - b\int_0^\infty k(s)\mathrm{e}^{x(t-s)}\mathrm{d}s$，对于 X的有界开集 Ω，N在 $\bar{\Omega}$ 上是 L紧，令 $\Omega = \{x \in X \mid \|x\| < M\}$，其中 $M = \left|\ln\frac{1}{bT}\int_0^T a(t)\mathrm{d}t + 2\int_0^T a(t)\mathrm{d}t\right|$。若 $\exists\, x \in \partial\Omega \cap \mathrm{Dom}L$，$\lambda \in (0, 1)$ 使 $Lx = \lambda N(x)$，即

$$x' = \lambda\left(a(t) - b\int_0^\infty k(s)\mathrm{e}^{x(t-s)}\mathrm{d}s\right) \tag{4}$$

由于 $x(t) = \int_0^t x'(s)\mathrm{d}s + x(0)$ 为 T周期的，故有 $\int_0^t x'(s)\mathrm{d}s = 0$，(4)两边从 0到 T积分得：

$$\int_0^T a(t)\,\mathrm{d}t = b\int_0^\infty k(s)\int_0^T a(t)\,\mathrm{e})\,\mathrm{d}t\mathrm{d}s$$

注意到 $x(t)$ 为 T周期，$\int_0^\infty k(s)\mathrm{d}s = 1$有：$\int_0^T a(t)\mathrm{d}t = b\int_0^T \mathrm{e}^{x(s)}\mathrm{d}s$，从而 $\exists\, t_1 \in [0, T]$使：$x(t_1) = \ln\frac{1}{bT}\int_0^T a(t)\mathrm{d}t$。由 (4) 知：

$$\int_0^T x'(t)\mathrm{d}t \leqslant \lambda\left(\int_0^T a(t)\mathrm{d}t + b\int_0^\infty k(s)\int_0^T \mathrm{e}^{x(t-s)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right) < 2\int_0^T a(t)\mathrm{d}t$$

则 $\forall\, t \in [0, T]$，由 $x(t) = \int_{t_1}^T x'(s)\mathrm{d}s + x(t_1)$ 得：

$$|x(t)| \leqslant \int_{t_1}^T |x'(s)|\,\mathrm{d}s + |x(t_1)| < 2\int_0^T a(t)\mathrm{d}t + \left|\ln\frac{1}{bT}\int_0^T a(t)\mathrm{d}t\right| = M$$ 与 $x \in \partial\Omega$ 矛盾，

从而引理 1条件 (i)满足。$\forall\, x \in \mathrm{Ker}L$，设 $x \equiv c$，$N(x) = a(t) - b\mathrm{e}^c$，$QN(x) = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)\mathrm{d}t - b\mathrm{e}^c$，若 $QN(x) = 0$，则有 $c = \ln\frac{1}{bT}\int_0^T a(t)\mathrm{d}t$，从而有 $= |c| = \left|\ln\frac{1}{bT}\int_0^T a(t)\mathrm{d}t\right| < M$。故引理 1条件 (ii) 满足．与 (ii) 同理可检验 (iii) 满足。故 $\exists\, x \in \Omega$，使 $Lx = Nx$，即 (1) 在 R上有周期解 $N(t) = \mathrm{e}^{x(t)}$。

2 解的渐近性

定理 2 设 $M_0 b\mathrm{e} < 1$，$N_1(t) = N_1(t, 0, h_1)$，$N_2(t) = N_2(t, 0, h_2)$ 分别为 (1) 过 $(0, h_1)$ 与 $(0, h_2)$ 的非 0解，则有 $\lim\limits_{t\to\infty} N_1(t) - N_2(t) = 0$

证 令 $z_i(t) = \ln N_i(t)$ $(i = 1, 2)$，则 $z_i(t)$ 满足方 (3)，令

$$V(t) = \left[z_1(t) - z_2(t) - \int_0^\infty\int_{t-s}^t bk(s)(\mathrm{e}^{z_1(v)} - \mathrm{e}^{z_2(v)})\mathrm{d}v\mathrm{d}s^2\right] + b\int_0^\infty k(s)\int_{t-s}^t\int_u^t(\mathrm{e}^{z_1(v)} - \mathrm{e}^{z_2(v)})\mathrm{d}v\mathrm{d}u\mathrm{d}s$$

$$V'(t) = -2\left(z_1(t) - z_2(t) - \int_0^\infty\int_{t-s}^t bk(s)(\mathrm{e}^{z_1(v)} - \mathrm{e}^{z_2(v)})\mathrm{d}v\mathrm{d}s\right)(\mathrm{e}^{z_1(t)} - \mathrm{e}^{z_2(t)})\int_0^\infty k(s)b\mathrm{d}s$$
$$+ b^2\mathrm{e}(\mathrm{e}^{z_1(t)} - \mathrm{e}^{z_2(t)})^2 - b^2\int_0^\infty k(s)\int_{t-s}^t(\mathrm{e}^{z_1(v)} - \mathrm{e}^{z_2(v)})^2\mathrm{d}v\mathrm{d}s$$

由于 $b^2\int_0^\infty k(s)\int_{t-s}^t 2(\mathrm{e}^{z_1(v)} - \mathrm{e}^{z_2(v)})(\mathrm{e}^{z_1(t)} - \mathrm{e}^{z_2(t)})\mathrm{d}v\mathrm{d}s \leqslant b^2\int_0^\infty k(s)\int_{t-s}^t(\mathrm{e}^{z_1(v)} -$

$e^{z_2(v)})^2 dv ds b^2 e(e^{z_1(t)} - e^{z_2(t)})^2$

由引理 2, $\exists T > 0$, $\forall t > T$ 有 $Z_1(t) < \ln M_0$, $Z_2(t) < \ln M_0$, 故有

$$(z_1(t) - z_2(t))(e^{z_1(t)} - e^{z_2(t)}) = (e^{z_1(t)} - e^{z_2(t)})^2 / e^{\theta z_1(t) + (1-\theta) Z_2(t)} \leqslant \frac{1}{M_0}(e^{z_1(t)} - e^{z_2(t)})^2, \ \forall t \geqslant T$$

从而有 $V'(t) \leqslant -2b\left(\frac{1}{M_0} - be\right)(e^{z_1(t)} e^{z_2(t)})^2$, $\forall t \geqslant T$

积分上式有 $V(t) + 2b\left(\frac{1}{M_0} - be\right)\int_T^t (e^{z_1(t)} - e^{z_2(t)})^2 dt \leqslant V(t) < B_1$

从而有 $\int_0^\infty (N_1(t) - N_2(t))^2 dt = \int_0^{+\infty} (e^{z_1(t)} - e^{z_2(t)})^2 dt \leqslant B$

其中 B_1 与 B 为与 M_0, b, e 有关的正常数, 由于

$$N_1'(t) - N_2'(t) = N_1(t)\left(a(t) - b\int_0^\infty k(s) N_1(t-s) ds\right) - N_2(t)\left(a(t) - b\int_0^\infty k(s) N_2(t-s) ds\right)$$

从而当 $t \geqslant T$ 时 $|N_1'(t) - N_2'(t)| \leqslant 2M_0(a^0 + bM_0)$

故存在 $L > 0$, $\forall s, s' > T$ 有

$$|(N_1(s) - N_2(s))^2 - (N_1(s') - N_2(s'))^2| \leqslant L|s - s'| \tag{5}$$

由 (5) 及 $\int_0^\infty (N_1(t) - N_2(t))^2 dt < +\infty$ 知, $\lim_{t \to \infty}(N_1(t) - N_2(t)) = 0$

推论 在定理 2的条件下方程 (1) 具有唯一周期解

证: 设 (1) 有两个周期解 $N_1(t)$, $N_2(t)$, 由定理 2, $\lim_{t \to \infty}(N_1(t) - N_2(t)) = 0$, 而 $\forall t \in R$, $N_1(t) = N_1(t + nt)$ $N_2(t) = N_2(t + nt)$, 因而 $N_1(t) = N_2(t)$

参 考 文 献

1 Gains R, Mawhin J. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations, Springer, Berlin, 1977. 165~211

2 George Seifert. Almost Periodic Solutions. For Delay Losgistic Equations with Almost Periodic Time Dependence. Diff. and Inte. Equ. 1996, (3): 355~342

3 李永思. 一个时滞种群模型周期正解的全局渐近稳定性. 见: 刘永清等编. 全国第五届常微分方程稳定性理论及其应用学术会议论文集. 大连: 大连海事大学出版社, 1996. 400~402

THE POSTIVE PERIODIC SOLUTIONS AND ITS ASYMPTOTIC BEHAVIOR FOR A DELAY LOGISTIC EQUATIONS

Yang Xitao

(*Guilin Institute of Technology*)

Abstract In this paper, the existence of postive periodic solutions for delay logistic equation has been built by using fixed theorem, and the asymptotic behavior of solutions has been proved. by using Liapunov function.

Key words logistic equation; delay; function; operator