

论相关平差的广义性

黄 杰

(桂林工学院国土开发与测绘系)

摘 要 平差即由直接观测值求定相关观测值。当相关观测值彼此不存在条件方程, 则相关观测值就是平差值; 若相关观测值互相存在条件, 则再进行相关平差可求得平差值。相关平差的广义性质为实现基本控制网的整体平差提供了可能。

关键词 相关观测; 相关权; 平差

中图号 P207

1 相关观测值的两种类型

进行相关平差, 首先要求定相关观测值及其相关观测权矩阵 (或相关观测权逆矩阵)。相关观测值在通常情况下并不是直接观测得到, 而是通过间接方式或以其他的形式获得。也即相关观测值可以表示成独立观测值的某种函数, 再通过一种限定条件和误差传播律来求定相关观测值和相关权矩阵 ($X P_X$)。用以求定相关观测值的函数关系通常有 2 种类型。

1.1 确定的函数关系

对于方向观测网, 在测站 O 上观测了 n 个方向, 则有 $(n-1)$ 个独立角度, 其值可通过 (1) 式获得

$$\begin{matrix} \beta & = & CL \\ (n-1) \times 1 & & (n-1) \times n \times 1 \end{matrix} \quad (1)$$
$$C = \begin{matrix} (n-1) \times n \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

由误差传播律, β 的协因数矩阵为

$$Q_{\beta\beta} = \begin{matrix} C & P & C^T \\ (n-1) \times (n-1) & (n-1) \times n \times n \times n \times (n-1) \end{matrix} \quad (2)$$

$$P_{\beta} = Q_{\beta\beta}^{-1} \quad (3)$$

若已知单位权方差 σ_o^2 , 则相关观测方差

$$D_{\beta\beta} = \sigma_o^2 Q_{\beta\beta} \quad (4)$$

由 (βP_{β}) 构成的这列相关观测, 其观测值 β 能满足测站条件。

1.2 统计函数式

①若选定网中各待定边的方位角作为相关观测值, 则如图 2

1995年2月22日收稿, 11月10日改回。

作者简介: 黄杰, 男, 1935 年出生, 副教授, 大地测量专业。

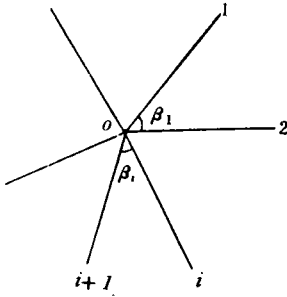


图 1 方向与角度关系图

Fig. 1 The relation of direction and angle

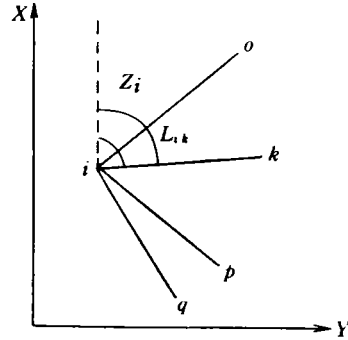


图 2 方向与方位关系图

Fig. 2 The relation of bearing and direction

$$T_{ik} = L_{ik} + v_{ik} + Z_i^o + \zeta_i \quad (5)$$

式中: T_{ik} 为 ik 方向的方位角相关观测值; L_{ik} 为 ik 方向的方向观测值; v_{ik} 为 L_{ik} 的改正数; Z_i^o 为测站 i 上的定向角近似值; ζ_i 为 Z_i^o 的改正数。

设 $T_{ik} = T_{ik}^o + \delta T_{ik}$, 则 (5) 式可写为

$$v_{ik} = -\zeta_i + \delta T_{ik} + l_{ik} \quad (6)$$

$$T_{ik} = T_{ik}^o - Z_i^o - L_{ik} \quad (7)$$

式中: T_{ik}^o 为 ik 方向方位角近似值; δT_{ik} 为 T_{ik}^o 的改正数。(6) 式是以误差形式表示的方程式, 亦可称为误差方程式。在一般情况下不能解出未知数 v_{ik} , ζ_i 和 δT_{ik} 。只能在一定条件下求解。设在 $[P_{vv}]$ = 最小条件下解算全部网中的 (6) 式, 只要网中至少有一条边的方位角为已知, 则可求得方位角相关观测值 T 及其相关权矩阵 P_T , 亦即 $(T \ P_T)$ 。在最小二乘条件下求得的这列相关观测, 其方位角相关观测值能满足一切角度条件。如测站条件, 圆周角条件, 三角形图形条件, 固定角条件, 固定方位角条件等。但不能满足网中的正弦条件: 如极条件, 固定边条件, 基线条件, 纵横坐标条件等^[2]。

②若选定网中各待定点坐标作为相关观测值, 则有

$$v_{ik} = -\zeta_i + a_{ik}\xi_k + b_{ik}n_k - a_{ik}\xi_i - b_{ik}n_i + l_{ik} \quad (8)$$

$$a_{ik} = -\rho'' \sin T_{ik}^o / S_{ik}^o, \quad b_{ik} = -\rho'' \cos T_{ik}^o / S_{ik}^o, \quad l_{ik} = T_{ik}^o - Z_i^o - L_{ik}$$

在最小二乘条件下解算全网的 (8) 式, 只要网中至少有必须的已知数据, 就可以唯一地求定待定点的坐标相关观测值和相关权矩阵。所求得的这列相关观测值能满足该观测网的一切条件。但如果网中新增加了观测值, 或将原网进行了扩大, 则原坐标相关观测值将不能满足新构成的条件。

2 最小二乘条件下的相关观测值及其相关权矩阵

$$(6), (8) \text{ 可写成一般形式} \quad V = A\delta_X + l \quad (9)$$

$$X = X^o + \delta_X \quad (10)$$

式中: v 为观测值 L 的改正数; X 为相关观测值。 X^o 为 X 的近似值; δ_X 为 X^o 的改正数;

$l = AX^o + A^o - L = L^o - L, \quad r_k(A) = t < n$

在 $V^T P V =$ 最小条件下解 (9) 式, 得法方程式

$N \delta_X + U = 0 \tag{11}$

式中 $N = A^T P A, \quad U = A^T P l \tag{12}$

于是求得

$$\left. \begin{aligned} \delta_X &= -N^{-1}U \\ Q_{XX} &= N^{-1} \\ X &= X^o + \delta_X \\ P_X &= N \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

$(X \ P_X)$ 是相关观测, 他是在最小二乘条件下求得的相关观测。如果 X 能满足一切条件, 则 X 就是平差值; 如果还有条件没有得到满足, 就应进行以 X 为相关观测值的相关平差, 求出平差值。这就是相关观测与平差值之间的关系。

设单位权方差的估值为 $\hat{\sigma}_o^2$, 则相关观测值 X 的方差为

$D_{XX} = \hat{\sigma}_o^2 Q_{XX} \tag{14}$

$\hat{\sigma}_o^2 = V^T P V / (n - t) \tag{15}$

$V^T P V = l^T P l + U^T \delta_X \tag{16}$

3 相关条件平差

设有平差值条件方程

$B \hat{L}_{\text{新}} + C \hat{X} = 0 \tag{17}$
 $r \times n \quad n \times 1 \quad r \times t \quad t \times 1$

有 $BV_{\text{新}} + CV_X + W = 0 \tag{18}$
 $W = BL_{\text{新}} + CX$

式中: $\hat{L}_{\text{新}}$ 为新增的观测值平差值; \hat{X} 为相关观测值之平差值; $V_{\text{新}}$ 为 $L_{\text{新}}$ 的改正数; V_X 为 X 的改正数。

当 $n=0$, 即没有新增加的观测值, 则 (17) 式为

$C \hat{X} = 0 \tag{19}$
 $r \times t \quad t \times 1$

有 $CV_X + W = 0 \tag{20}$
 $W = CX$

在 $V_{\text{新}}^T P_{\text{新}} V_{\text{新}} + V_X^T P_X V_X =$ 最小条件下解算 (18) 式。组成

$\psi = V_{\text{新}}^T P_{\text{新}} V_{\text{新}} + V_X^T P_X V_X - 2K^T(BV_{\text{新}} + CV_X + W) = 0 \tag{21}$

为了使 ψ 为最小, 必须使它对自变量 $V_{\text{新}}$ 和 V_X 的偏导数等于零。求得

$$\begin{aligned} V_{\text{新}}^T P_{\text{新}} - K^T B &= 0 \\ V_X^T P_X - K^T C &= 0 \end{aligned}$$

或写为

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{新}} &= P_{\text{新}}^{-1} B^T K \\ V_X &= P_X^{-1} C^T K \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

将 (22) 代入 (18) 得

$$(BP_{\text{新}}^{-1}B^T + CP_X C^T)K + W = 0 \quad (23)$$

$$\text{令} \quad M = (BP_{\text{新}}^{-1}B^T + CP_X C^T)$$

$$\text{则有} \quad M \cdot K + W = 0$$

$$\text{求得} \quad K = -M^{-1}W \quad (24)$$

$$\text{求得各改正数为} \quad V_{\text{新}} = P_{\text{新}}^{-1}B^T K \quad (25)$$

$$V_X = P_X^{-1}C^T K \quad (26)$$

$$\text{平差值} \quad \left. \begin{aligned} \hat{L}_{\text{新}} &= L_{\text{新}} + V_{\text{新}} \\ \hat{X} &= X + V_X \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\text{单位权方差估值计算} \quad \hat{\sigma}_0^2 = V_{\text{总}}^T P_{\text{总}} V_{\text{总}} / (n - t + r) \quad (28)$$

$$\text{而} \quad V_{\text{总}}^T P_{\text{总}} V_{\text{总}} = I^T P I + U^T \delta_X + W^T K$$

式中 $I^T P I + U^T \delta_X$ 项见 (16) 式。

4 相关观测值与平差值的关系

在三角网中, 任何一类元素都可视为相关观测值。①若选定网中各个角度作为相关观测值, 则可按 (1), (2) 和 (3) 式求得 $(\beta \ P_\beta)$ 。

②若选定网中各待定边的方位角作为相关观测值, 则可用最小二乘法解 (6) 式求得 $(T \ P_T)$ 。③若选定网中各待定点的坐标作为相关观测值, 则可用最小二乘法解算 (8) 式求得相关观测值和相关权阵 $(Z \ P_z)$ 。这里的 Z 表示待定点的纵横坐标。

应当指出: ①的 $(\beta \ P_\beta)$ 只能满足测站条件, 因此称为测站平差值; ②中的 $(T \ P_T)$ 只能满足测站条件和网中的角度条件, 可称为角度条件平差值; ③中的 $(Z \ P_z)$ 不仅能满足测站条件, 也满足角度条件和正弦条件, 称为坐标平差值。如果该三角网没有新增加条件 (如新增加了观测值则增加了观测条件等)。则这时的相关观测值 Z 就是最后平差值。但如果网中又增加了新的条件, 则上面所谓“最后平差值”又变成了相关观测值了。要获得新的最后平差值, 还得进行相关平差。

由此得到结论: 所谓平差问题, 就是由直接观测值求定相关观测值问题。当相关观测值彼此不存在条件方程, 则相关观测值就是平差值; 若相关观测值相互存在条件方程, 则再进行相关平差, 求得平差值。

5 相关平差的应用举例

5.1 一种新的平差途径

以文献 [3] 之算例为例 (图 3)。有误差方程

$$v_{ik} = -\zeta_i + \delta T_{ik} + l_{ik}$$

应用史赖伯规责消去定向角未知数 ζ_i 后可得约化误差方程, 再组成法方程并解算求得方位角相关观测值

$$T \ (36^\circ 32' 29.7'' \quad 164^\circ 21' 09.9'' \quad 271^\circ 11' 49.9'')^T$$

$$Q_{TT} = 0.3 \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

所求得的 T 不能满足以 P 为极的极条件。由文献〔4〕可得极条件

$$\begin{aligned} &(\cot a_1 + \cot b_3)v_{T_1} + (\cot a_2 + \cot b_1)v_{T_2} \\ &+ (\cot a_3 + \cot b_2)v_{T_3} + W = 0 \end{aligned}$$

(此条件就是 (20) 式, 因为没有新增观测值。)

$$W = (\Pi \sin a / \Pi \sin b - 1)\rho''$$

即

$$4.88v_{T_1} + 3.52v_{T_2} + 2.60v_{T_3} - 32.66 = 0$$

用相关平差求得

$$V_T = (3.3'' \quad 2.8'' \quad 2.6'')^T$$

于是

$$\hat{T} = (36^\circ 32' 33.0'' \quad 164^\circ 21' 12.7'' \quad 271^\circ 11' 52.5'')^T$$

与文献〔3〕的结果一致。

5.2 全国基本控制网整体平差的可能性

我国控制网是采用逐级控制原则建立的。人们已经发现, 这种逐级控制原则, 虽然减轻了平差计算工作, 然而强制条件带来的误差影响不容勿视! 如强制条件闭合差远比自由网条件闭合差大得多就是例证。因此整体平差势在必行。相关平差的广义性质提供了实现这类庞大计划的可能性。

我国天文—大地网是以 I 等锁环为骨架而建立的。如果以每个锁环作为平差单元, 在一个单元内, 以不同等级的观测精度统一定权, 然后对这个单元进行平差

$$V = A_1 X_1 + A_2 X_2 + l \tag{29}$$

式中: A_1, X_1 为除 I 等点以外的未知数系数矩阵和未知数向量; A_2, X_2 为 I 等点的未知数系数矩阵及未知数向量。平差 (29) 式可求得 $(X_2 \ P_{X_2})$

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{30}$$

式中

$$\left. \begin{aligned} N_{11} &= A_1^T P A_1 & N_{12} &= A_1^T P A_2 \\ N_{21} &= A_2^T P A_1 & N_{22} &= A_2^T P A_2 \\ U_1 &= A_1^T P l & U_2 &= A_2^T P l \\ X_2 &= -\bar{N}_{22}^{-1} \bar{U}_2 & P_{X_2} &= \bar{N}_{22} \end{aligned} \right\} \tag{31}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{N}_{22} &= N_{22} - N_{21} N_{11}^{-1} N_{12} \\ \bar{U}_2 &= U_2 - N_{21} N_{11}^{-1} U_1 \end{aligned} \right\} \tag{32}$$

$(X_2 \ P_{X_2})$ 表示 I 等点坐标相关观测。把各个 I 等锁环的坐标相关观测组成整个 I 等大地网的坐标相关观测, 以 $(X \ P_X)$ 表示。

然后进行天文—大地网的整体平差。这时可根据天文、重力、基线及 GPS 点的观测值与坐标相关观测值一起进行整体平差, 同时确定大地系的定位参数。

由于所有的三角观测已转换为 I 等点坐标相关观测, 因此, 天文—大地网的整体平差并不是过于庞大的工作了。

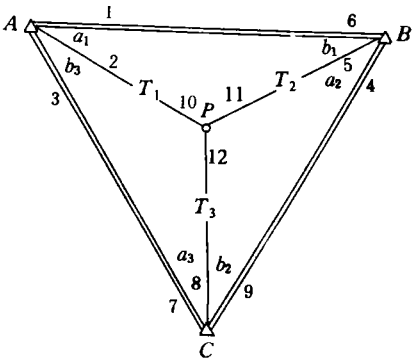


图 3 固定三角形内插一点

Fig.3 Interposition a point in a fixed triangle

参 考 文 献

- 1 於宗涛, 鲁林成主编. 测量平差基础. 北京: 测绘出版社, 1978. 344~350
- 2 黄杰. 拟方位观测条件平差. 四川测绘, 1987 (2): 4~8
- 3 陈永龄. 大地测量学 (上卷第2分册). 北京: 测绘出版社, 1968. 69~73, 94~96
- 4 黄杰. 测边网的一种平差法. 工程勘察, 1982 (5): 70~73

THE GENERALIZATION OF CORRELATIVE ADJUSTMENT

Huan Jie

(Department of Land Development and Surveying and Mapping, Guilin Institute of Technology)

Abstract Adjustment problem is to obtain correlative observations from direct observations. If there exists no the condition constraint in covvelative obsserrations. The correlative observations are the adjustment values; and if there exists the condition constraint in the correlative observations. The correlative adjustment can be made to obtain adjustment values. The generalizgation of the correlative adjustment makes it possible to do global adjustment of the basic control network in China.

Key words correlative observation; correlative weight; adjustment

变 色 的 宝 石

宝石多种多样, 会变色的宝石尤为名贵。史载秦王要用 15 座城与赵国交换的“和氏璧”, 就是“侧面视之色碧; 正面视之色白”的会变色的宝石。但“和氏璧”早已失传, 不知其为何物了。

1830 年, 俄国乌拉尔祖母绿矿山发现一种会变色的宝石。时值沙皇诞辰, 就以皇太子的名字命名为“亚历山大石”。此石在阳光下呈翠绿色, 而在夜晚的白炽灯光下就变成紫红色。

无独有偶。前年, 我国地质工作者在新疆天山山脉海拔 6 000 m 处, 发现一种奇妙的变色蓝宝石, 它一般为透明的蓝紫色, 在日光下为紫色, 而在灯光下竟变成红色。

同一颗宝石, 为什么在不同光线下或不同方向会呈现不同的颜色呢? 那是因为这些宝石在生长时是不均匀的, 在不同方向上结构各异。当光线射入宝石晶体后, 被分解成互相垂直的两条或三条偏振光。当不同的光线射入便会按其固有的波长和光路在宝石晶体中传播, 而晶体的不同方向对光的吸收也不同, 故尔呈现不同颜色。