二阶线性微分方程复振荡的二个结果*

王　升

（西江大学数学系，肇庆，526061）

摘　要　研究了二阶线性微分方程两个线性无关解 $f_1(z)$，$f_2(z)$之积的零点收敛指数 $\lambda(f_1, f_2)$，以及其解的增长级 $\rho(f)$，给出了 $\lambda(f_1f_2)=\infty$和 $P(f)=\infty$的充分条件。

关键词　二阶线性微分方程；整函数；增长级；收敛指数

中图号　O174.52；O175.1

0　引　言

考虑以下方程

$$f''+A(z)f'+B(z)f=0 \tag{1}$$

其中 $A(z)$，$B(z)$均为有穷级整函数。（1）式的所有解都是整函数。文献〔1～4〕研究了式（1）式的解的增长级及其某些表示，这里主要研究（1）的任两个线性无关解 $f_1(z)$，$f_2(z)$之积的零点收敛指数 $\lambda(f_1f_2)$，以及（1）的任一非平凡解 $f(z)$之增长级 $\rho(f)$。

定义1　设 $g(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个整函数。则记

$$\lambda(g)=\overline{\lim_{r\to\infty}}(\log^+ N(r,\frac{1}{g})/\log r$$

$$\rho(g)=\overline{\lim_{r\to\infty}}(\log^+ T(r,g)/\log r$$

定义2　设 $g(z)$是开平面$|z|<+\infty$上的一个整函数，其级 $\rho(g)<\infty$，并且具有 k（$k\geqslant 1$）个判别有穷渐近值 a_i（$i=1, 2, \cdots, k$），其相应渐近路径为 L_i（$i=1, 2, \cdots, k$），L_i和 L_{i+1}（$i=1, 2, \cdots, k$），$L_{k+1}=L_1$是相邻的，界围一个单连通区域 D_i。若 $k=2\rho(g)$。则称 $g(z)$为级 $k/2$的。

所涉及的 Nevanlinna 理论和标准记号均据文献〔5〕。

定理1　设 $A(z)$，$B(z)$为有穷级整函数，又设 $f_1(z)$，$f_2(z)$为（1）的任两个线性无关解。则：（a）若 $B(z)$是级 $k/2$的，$\rho(A)<k/2$，则 $\lambda(f_1f_2)=\infty$；（b）若 $A(z)$是级 $k/2$的，$\rho(B)<k/2$，则 $\lambda(f_1f_2)=\infty$。

定理2　设 $A(z)$，$B(z)$均为有穷级整函数，$A(z)$是级 $k/2$的，且 $\rho(A)\neq\rho(B)$。又设 $f(z)$为（1）的任一非平凡解，则 $\rho(f)=\infty$。

由定理2易得到以下推论：设 $A(z)$，$B(z)$均为有穷级整函数且 $A(z)$是级 $k/2$的，又设

1995年6月15日收稿.

作者简介：王　升，男，1965年出生，硕士，讲师，基础数学专业.

*国家自然科学基金资助项目（项目号：19471030）.

$f(z)$为（1）的任一非平凡解，若 $\rho(f)<\infty$，则必有 $\rho(A)=\rho(B)$。

1 几个引理

引理 1 设$f_1(z)$，$f_1(z)$为（1）的任两个线性无关解。令 $F(z)=f_1(z)f_2(z)e^{\int A(z)dz}$，则

$$4B-A^2-2A'=(F'/F)^2-2F''/F-1/F^2$$

证明：由$f_1(z)$，$f_1(z)$的 Wronski 行列式有

$$f_1f_2(f'_2/f_2-f'_1/f_1)=e^{-\int A(z)dz}$$

因而有 $$f'_2/f_2-f'_1/f_1=1/F \tag{2}$$

又因为 $$f'_1/f_1+f'_2/f_2=F'/F-A$$

把以上二式相加后得 $$2f'_2/f_2=1/F+F'/F-A \tag{3}$$

对（3）式微分一次得 $$2f''_2/f_2=2(f'_2/f_2)^2-F'/F^2+F''/F-(F'/F)^2-A'$$

把（3）式代入上式后得

$$2f''_2/f_2=1/2F^2+A^2/2-A/F-AF'/F+F''/F-(F'/F)^2/2-A' \tag{4}$$

由（3），（4）式代入（1）式后即证得引理 1。

为了方便起见，不妨把文献〔6〕中的定理 4.12 作为引理如下：

引理 2 设$f(z)$为级 $k/2$ 的。则对任意值θ，$0<\theta<2\pi$ 和任意小的数 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{r\to\infty}\log\log M\{\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r);f\}/\log r=\rho(f)$$

其中：$M\{\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r),f\}$表示$f(z)$在$\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r)$上的最大模。

以下引理是文献〔3〕中引理 1（b）的特殊情形：

引理 3 设$f(z)$是 ρ 级超越整函数。任给定 $\varepsilon>0$。则存在对数测度为有穷的集 $E_o\subset(1,\infty)$，使当 $r\notin E_o\bigcup[0,1]$时，有

$$|f'(z)/f(z)|<|z|^{\rho+\varepsilon-1}$$

引理 4〔9〕 设 $G(r)$和 $H(r)$为两个定义在（0，R）内的非减实函数。若除去一个有穷测度的集合 E 外有 $G(r)<H(r)$。则对任意的 $\alpha>1$，存在 r_o 使得对所有的 $r>r_o$ 有 $G(r)<H(\alpha r)$。

2 定理 1 的证明

（a）假设 $\lambda(f_1f_2)<\infty$。由（1）式有

$$(f'_j/f_j)^2+(f'_j/f_j)'+A\cdot f'_j/f_j+B=0,\quad (j=1,2)$$

于是，由Nevanlinna理论得

$$m(r,f'_j/f_j)\leqslant m(r,A)+m(r,B)+S(r,f'_j/f_j),\qquad (j=1,2)$$

因而有

$$T(r,f'_j/f_j)\leqslant \overline{N}(r,1/f_j)+T(r,A)+T(r,B)+O\{\log rT(r,f'_j/f_j)\},\qquad r\notin E,\ (j=1,2)$$

E为测度为有穷的r值集。据引理4，易推得

$$\rho(f'_j/f_j)\leqslant\max\{\rho(A),\ \rho(B),\ \lambda(f_j)\}\quad (j=1,2)$$

由（2）式得 $$T(r,F)\leqslant T(r,f'_1/f_1)+T(r,f'_2/f_2)+O(1)$$

因此 $$\rho(F)\leqslant\max_{j=1,2}\{\rho(f'_j/f_j)\}\leqslant\max\{\rho(A),\rho(B),\lambda(f_1),\lambda(f_2)\}<\infty$$

由引理1，有

$$4B = A^2 + 2A' + (F'/F)^2 - 2F''/F - 1/F^2$$

根据 Wiman–Valiron 理论，文献〔7〕中的定理 1.15、定理 1.16 和引理 2，对任意小的正数 $\varepsilon>0$，使当

$$z\in\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r)\subset\Omega(\theta_1;\theta_2;r)$$

时，则除去对数测度为有穷的 r 值集 $D(r)$ 外，当 $r\to\infty$ 时，有

$$4|B(z)|\leqslant O\{|A(z)|^2+|A'(z)|+\nu(r)^2/r^2\} \tag{5}$$

其中：$Z\in\Omega(\theta_1,\theta_2;r)$ 时，$|F(z)|>M(r,F)[\nu(r)]^{-1/16}$；$M(r,F)$ 为 $F(z)$ 在 $|z|=r$ 上的最大模；$\nu(r)$ 为 $F(z)$ 的中心指标，$0\leqslant\theta_2-\theta_1=\theta<2\pi$

因为 $B(z)$ 为超越整函数。故存在 $z\in\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r)$，$|z|\notin D(r)$，使得 $|B(z)|=M\{\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r),B\}>e$。对（5）式取两次对数得

$$\log\log M\{\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r),B\}\leqslant\log^+\log^+|A(z)|+\log^+\log^+|A'(z)|+\log^+\log^+\nu(r)+O(1),\quad r\notin D(r)$$

据引理 4，引理 2 及文献〔6〕中的定理 1.11 易推出

$$\rho(B)<\rho(A)$$

这矛盾于题设。说明 $\lambda(f_1f_2)=\infty$

（b）假设 $\lambda(f_1f_2)<\infty$，由引理 1 有

$$A^2=-2AA'/A+4B+1/F^2+2F''/F-(F'/F)^2$$

据引理 3 知，当 $|z|\notin E_o\bigcup[0,1]$ 时，有

$$|A'(z)/A(z)|<|z|^{\rho(A)}$$

其中 E_o 为测度为有穷的 r 值集。于是，当 $|z|\notin E_o\bigcup[0,1]$ 时，有

$$|A(z)|^2\leqslant O\{|z|^{\rho(A)}|A(z)|+|B(z)|+1/|F(z)|^2+|F''/F|+2|F'/F|^2\}$$

对上式应用Wimain– Valiron理论，类似于（a）的证明，平行地可推出，对任意的正数 $\varepsilon>0$，使当 $z\in\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r)\subset\Omega(\theta_1,\theta_2;r)$，$|z|\notin D(r)\bigcup E_o\bigcup[0,1]$ 时，则当 $r\to\infty$ 时，有

$$|A(z)|^2\leqslant O\{|z|^{\rho(A)}|A(z)|+|B(z)|+\nu(r)^2/r^2\}$$

因为 $A(z)$ 是超越的，故存在 $z\in\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r)$，$|z|\notin D(r)\bigcup E_o\bigcup[0,1]$，使得 $|A(z)|=M\{\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r),A\}>e$。因此对上式取一次对数得

$$\log M\{\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r),A\}\leqslant\log^+|B(z)|+\log^+\nu(r)+\rho(A)\log^+r+O(1)$$

对上式再取一次对数得

$$\log\log M\{\overline{\Omega}(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon;r),A\}\leqslant\log^+\log^+|B(z)|+\log^+\log^+\nu(r)+\log^+\log^+r+O(1)$$

类似地，由上式可推得

$$\rho(A)<\rho(B)$$

这矛盾于题设。说明 $\lambda(f_1f_2)=\infty$。定理 1 证明完毕。

3　定理 2 的证明

若 $\rho(A)<\rho(B)$，则（1）的任一非平凡解 $f(z)$ 都是无穷级的。事实上，若不然，假设 $\rho(f)<\infty$，由（1）式知

$$B=-A\cdot f'/f-f''/f$$

应用 Nevanlinna 理论于上式得

$$m(r,B)<m(r,A)+O(\log r)$$

因此

$$T(r,B)<T(r,A)+O(\log r)$$

由此可推出 $\rho(A)<\rho(B)$ 矛盾。

现在考虑 $\rho(A)<\rho(B)$，假设 $\rho(f)<\infty$，则由（1）式有

$$A(z)f'/f=-B(z)-f''/f$$

对上式应用 Wiman-Valiron 理论，类似于定理 1a 的证明，容易推得

$$\rho(A)<\rho(B)$$

矛盾，说明 $P(f)=\infty$。定理 2 证明完毕。

参 考 文 献

1 Bank S, Laine I. Reine Angew. Math. 1983 (344): 1～21
2 Bank S, Langley J K. Proc. Edinburgh Math. Soc. 1987, (30): 455～469
3 Gundersen G. Trams. Amer. Math. Soc. 1988(305): 415～429
4 Langleyy J K. Kodai Math. J. 1986 (9): 430～439
5 Hayman W. Meromorphic functions, Oxford at the Clarenden Press, 1964
6 张广厚. 整函数和亚纯函数理论, 北京: 科学出版社, 1986. 20～31
7 何育赞, 萧修治. 代数体函数与常微分方程. 北京: 科学出版社, 1988. 59～70

TWO RESULTS OF THE COMPLEX OSCILLATION THEORY OF THE SECOND ORDER LINEAR DIFFERENTIAL·EQUATION

Wang Sheng
(Dept. of Math. West River University, Zhaoqing)

Abstract The zero-exponent of convergence $\lambda(f_1f_2)$ of the product of any two linear independent solutions $f_1(z)$, $f_2(z)$ of second linear differential equations and the growth $\rho(f)$ of their solution have been investigated. Furthermore, The sufficient condition of $\lambda(f_1f_2)=\infty$ and $\rho(f)=\infty$ have been given.

Key words second order linear defferential equation; entire function; growth of function; exponent of convergence