

文章编号: 1674-9057(2019)02-0410-05

doi:10.3969/j.issn.1674-9057.2019.02.020

顾及系数矩阵结构灰色 Verhulst-TLS 估计及 路基沉降变形预测

康传利¹, 陈 洋¹, 顾峻峰¹, 周 吕^{2,3}, 徐骏平⁴

(1. 桂林理工大学 a. 测绘地理信息学院; b. 广西空间信息与测绘重点实验室, 广西 桂林 541006; 2. 武汉大学 测绘学院, 武汉 430079; 3. 东华理工大学 江西省数字国土重点实验室, 南昌 330013; 4. 湖北天尚土地勘测规划设计有限公司, 武汉 430071)

摘 要: 针对观测值存在误差时, 灰色 Verhulst 模型的白化方程系数矩阵同样包含误差, 如果再使用最小二乘方法进行求解, 计算出的模型参数是有偏的, 而路基沉降预测精度要求越来越高, 对此, 提出了一种顾及系数矩阵误差结构的总体最小二乘新算法, 该算法顾及系数矩阵误差及其特殊结构, 考虑误差全面, 减少未知参数个数, 预测精度高, 可广泛用于路基沉降预测。

关键词: 系数矩阵误差结构; 总体最小二乘估计; 灰色 Verhulst 模型; 路基沉降
中图分类号: P258 **文献标志码:** A

提高预测精度需要对误差的来源进行分类并加以改正。在数据处理方面, 灰色 Verhulst 模型未知参数的求解常在最小二乘(least squares, LS)条件下进行。事实上, 当观测值包含误差时, 由观测值累加而形成的白化微分方程系数矩阵同样包含误差, 此时, 灰色 Verhulst 模型的最小二乘解是有偏的^[1]。路基沉降前期, 沉降速率大, 前期数据预测拟合精度对最终沉降预测值影响巨大。鉴于此, 本文提出了一种基于灰色 Verhulst 模型总体最小二乘(total least squares, TLS)计算新方法。该方法顾及系数矩阵误差及特殊结构, 减少了未知参数个数, 并对初始预测值进行了最优求解。以贵广高速铁路路基沉降预测为例, 对路基沉降常用预测模型进行预测精度对比分析, 验证了本文新方法预测精度高, 可以广泛用于路基沉降预测。

1 估计方法

1.1 灰色 Verhulst-LS 估计

灰色 Verhulst 模型常用于具有饱和状态过程的

实际问题, 其一阶白化非线性微分方程为^[2]

$$dX^{(1)}/dt = -aX^{(1)} + b \cdot (X^{(1)})^2。 \quad (1)$$

令 $C = [a \ b]$, $X^{(1)}$ 表示路基观测值的一次累加, $X^{(0)}(n)$ 表示第 n 次路基沉降观测值, 方程求解为

$$A = \begin{bmatrix} -x^{(1)}(2) & (x^{(1)}(2))^2 \\ -x^{(1)}(3) & (x^{(1)}(3))^2 \\ \dots & \dots \\ -x^{(1)}(n) & (x^{(1)}(n))^2 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \dots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}。 \quad (2)$$

式中: A 为系数矩阵; L 为观测向量。若观测值的协因数阵为 Q , 在最小二乘条件下可求出未知参数 a 、 b 的最优解:

$$C = (A^T Q^{-1} A)^{-1} A^T Q^{-1} Y。 \quad (3)$$

1.2 灰色 Verhulst-TLS 估计

受外界环境、仪器因素、人为条件的影响, 观测数据 $X^{(0)}(k)$ 不可避免的会包含误差^[3-4], 则由 $X^{(0)}(k)$ 经过一次累加并取平均值形成的系数矩阵 A 中同样包含误差。TLS 估计兼顾系数矩阵和观测向量误差^[5], 因此常用于系数矩阵和观测向量同时包含误差的方程求解。根据式(1)的灰色 Verhulst 的变

量误差模型(errors-in-variables, EIV)为^[6]

$$\mathbf{L} + \mathbf{V}_L = (\mathbf{A} + \mathbf{E}_A)\mathbf{C}, \quad (4)$$

式中: \mathbf{E}_A 表示系数矩阵的改正数; \mathbf{V}_L 表示观测向量改正数, 其随机模型为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_L \\ \text{vec}(\mathbf{E}_A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_L \\ \text{vec}(\mathbf{E}_A) \end{bmatrix} \sim \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_L & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_A \end{bmatrix} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

其中, $\text{vec}(\cdot)$ 表示拉直运算。需要注意: 一般情况下, 常未考虑系数误差矩阵 \mathbf{E}_A 中各误差分量之间的相互关系, \mathbf{E}_A 中未知参数的个数为 $2(n-1)$ 。

总体最小二乘算法的平差准则为

$$\text{vec}(\mathbf{E}_A)^T \cdot \text{vec}(\mathbf{E}_A) + \mathbf{V}_L^T \mathbf{V}_L = \min. \quad (6)$$

1.3 顾及系数矩阵结构灰色 Verhulst-TLS 估计

1.3.1 模型建立 TLS 估计在处理系数矩阵误差具有独特的优势, 但 TLS 估计会成倍增加未知参数, 这会导致模型的计算效率和稳定性降低^[7]。已有实验表明, 总体最小二乘估计还存在估值漂移现象^[8]。系数矩阵 \mathbf{A} 中第 2 列中的数是第 1 列数的平方, 当系数矩阵 \mathbf{A} 的第 1 列改正数为 $-v_i$ 时, 则第 2 列改正数为 $(2X^{(1)}(i) \times v_i + v_i^2)$ 。鉴于此, 本文提出了顾及系数矩阵 \mathbf{A} 改正数变化规律的灰色 Verhulst 的 TLS 算法, 其中误差模型和随机模型见式(4)、式(5), 式(4)中 \mathbf{E}_A 和 \mathbf{V}_L 可以表示为

$$\mathbf{E}_A = \begin{bmatrix} -v_2 & 2v_2x_2^{(1)} + v_2^2 \\ -v_3 & 2v_3x_3^{(1)} + v_3^2 \\ \dots & \dots \\ -v_n & 2v_nx_n^{(1)} + v_n^2 \end{bmatrix}; \mathbf{V}_L = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ \dots \\ e_n \end{bmatrix}. \quad (7)$$

根据系数矩阵误差特点, 可令

$$\mathbf{V}_A = \mathbf{D}\mathbf{V}_a, \quad (8)$$

式中: $\mathbf{V}_A \in R^{2(n-1) \times 1}$ 为系数矩阵改正数; $\mathbf{V}_a = [v_2, v_3, \dots, v_n] \in R^{(n-1) \times 1}$ 为误差改正数; 转换矩阵 $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_1 \\ \mathbf{D}_2 \end{bmatrix}$, 其中, $\mathbf{D}_1 = \text{diag}(1, 1, \dots, 1) \in R^{(n-1) \times (n-1)}$;

$\mathbf{D}_2 = \text{diag}(2x_2^{(1)} + v_2, 2x_3^{(1)} + v_3, \dots, 2x_n^{(1)} + v_n) \in R^{(n-1) \times (n-1)}$ 。则顾及系数矩阵的 TLS 估计准则为

$$\mathbf{V}_L^T \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_a^T \mathbf{V}_a = \min. \quad (9)$$

将式(4)中的函数模型在初值 \mathbf{C}^0 、 \mathbf{V}_a^0 处进行展开, 并令 $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}^0 + c$, $\hat{\mathbf{V}}_a = \mathbf{V}_a^0 + \Delta v_a$, 其中 c 、 Δv_a 表示初值的改正数, 则式(4)化简为^[9]

$$\begin{cases} \mathbf{V}_L = (\mathbf{A} + \text{vec}^{-1}(\mathbf{D}\mathbf{V}_a^0 + \mathbf{D}\Delta v_a))(\mathbf{C}^0 + c) - \mathbf{L}; \\ \mathbf{V}_a = \mathbf{V}_a^0 + \Delta v_a. \end{cases} \quad (10)$$

其中: $\text{vec}^{-1}(\cdot)$ 表示 $\text{vec}(\cdot)$ 的逆运算。可写成间接平差形式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_L \\ \mathbf{V}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \text{vec}^{-1}(\mathbf{D}\mathbf{V}_a^0) & ((\mathbf{C}^0)^T \otimes \mathbf{I}_{n-1})\mathbf{D} \\ 0 & \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ \Delta v_a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{L} - \mathbf{A}\mathbf{X}^0 - ((\mathbf{C}^0)^T \otimes \mathbf{I}_{n-1})\mathbf{D}\mathbf{V}_a^0 \\ -\mathbf{V}_a^0 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

式中: \otimes 为矩阵的克罗内克积。进一步可以表示为

$$\mathbf{V}' = \mathbf{B}'\mathbf{X}' - \mathbf{L}'. \quad (12)$$

根据最小二乘平差原理。未知参数的解为

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}')^{-1} \mathbf{B}'^T \mathbf{L}'. \quad (13)$$

本文方案采用迭代方法对未知参数进行求取, 顾及系数矩阵结构的灰色 Verhulst 模型总体最小二乘具体步骤为: ① 按一般总体最小二乘算法计算出未知参数初值 \mathbf{C}^0 , 系数矩阵改正数初值 \mathbf{V}_a^0 ; ② 根据系数矩阵的特殊结构, 构造系数矩阵 \mathbf{D} ; ③ 根据式(13)计算改正数 c 和 Δv_a , 并根据 $\mathbf{C}^{i+1} = \mathbf{C}^i + c$, $\mathbf{V}_a^{i+1} = \mathbf{V}_a^i + \Delta v_a$ 计算新的值; ④ 重复步骤 ②、③, 直到相邻的两次参数值 \mathbf{X}' 之差小于迭代限差, 迭代终止。

1.3.2 初始值优化 顾及系数矩阵结构灰色 Verhulst-TLS 估计可以计算出灰色 Verhulst 模型白化方程未知参数最佳估值 a 、 b 。在工程上, 常直接令白化方程解的初值为 $x^{(0)}(1)$ 。事实上, 最优预测曲线不一定经过 $x^{(0)}(1)$ 点, 并且第 1 期路基沉降预测值对最终路基沉降预测值影响巨大。为提高模型的预测精度, 需要对初值进行优化。根据灰色 Verhulst 模型求解原理, 设灰色 Verhulst 模型白化方程的解为^[10]

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = \frac{1}{b/a + se^{ak}}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (14)$$

根据最小二乘原理, 预测值 $\hat{X}^{(1)}(k)$ 同原始值 $X^{(1)}(k)$ 的误差平方和最小, 建立无约束条件平差优化模型:

$$\begin{aligned} \min_s Q &= \min_s \sum_{k=2}^n ((\hat{X}^{(1)}(k))^{-1} - (X^{(1)}(k))^{-1})^2 \\ &= \min_s \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{b}{a} + se^{ak} - (X^{(1)}(k+1))^{-1} \right)^2, \end{aligned} \quad (15)$$

根据极限定理, 令 $dQ/ds = 0$, 即可得唯一驻点:

$$s = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \left((X^{(1)}(k+1))^{-1} - \frac{b}{a} \right) e^{ak}}{\sum_{k=1}^{n-1} e^{2ak}}. \quad (16)$$

将 s 的值代入式 (14) 可以得到 $\hat{X}^{(1)}(k)$, 再通过一次累减生成灰色 Verhulst 模型预测值:

$$\hat{X}^{(0)}(k+1) = \hat{X}^{(1)}(k+1) - \hat{X}^{(1)}(k), \quad (17)$$

其中, $k = 1, 2, \dots, n-1$ 。

2 工程实例比较分析

贵广高速铁路是“十一五”规划的重点项目, 高速铁路建设需严格控制工后沉降, 路基沉降观测是确保高速铁路正常运营的重要部分。路基评估要求在路基填筑完成或堆载预压后不少于 3 个月的实际观测, 并根据观测数据作多种回归曲线, 当曲线回归的相关系数不低于 0.92 时, 预测方程可用于沉降预测^[2]。因此, 如何提高预测精度是沉降数据处理的重要内容。铺轨前 6 个月对路基进行路基沉降观测, 沉降数据取至路基沉降中后期, 每 7 天为 1 个周期。采用 TrimbleDi Ni03 电子水准仪按国家二等水准要求对沉降板进行沉降观测, 监测点位于路基中央。由于本段路基沉降观测数据沉降变化基本相同, 选具有代表性的监测点 A 进行沉降预测分析。沉降点 A 监测期为 1 年, 共获得了 52 期观测数据, 其沉降观测值和总沉降量见图 1。

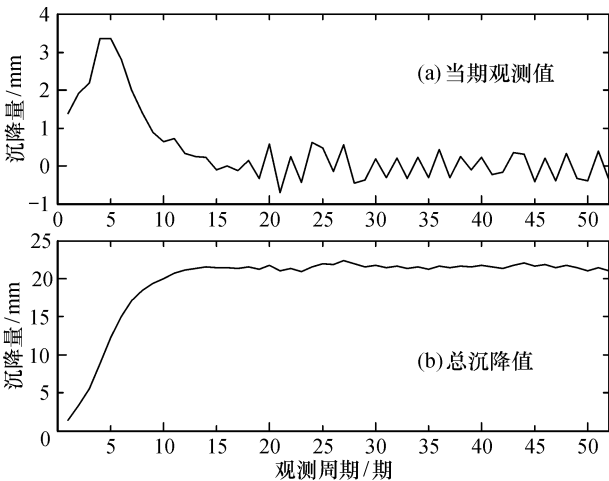


图 1 沉降点 A 本期沉降观测值和总沉降量变化
Fig. 1 Sedimentation observations and total settlement changes in settlement Point A

沉降点 A 开始监测时下沉速率较快, 后期趋于稳定, 具有饱和发展过程。受测量仪器、环境和人为影响, 观测数据中不可避免会存在误差^[7], 因此, 在路基沉降观测后期, 观测值仍在不断波动。观测数据存在误差, 则由观测数据一次累加而形成

的白化非线性微分方程系数矩阵同样存在误差, 此时最小二乘解是有偏的, 因此, 如何建立一个更符合客观实际的数学模型来求解路基下沉真实沉降曲线就显得十分重要。为综合比较本文新算法的有效性和可靠性, 本文选用灰色 Verhulst 模型的 LS 估计, TLS 估计和顾及系数矩阵 TLS 估计对 A 点前 12 期数据进行建模, 预测后 40 期数据, 并综合比较各模型的拟合精度和预测精度。

2.1 灰色 verhulst 模型不同估计方法比较

使用前 12 期数据进行建模时, 若使用 LS 估计, 式(1)中有 2 个未知数 a 、 b ; 当使用 TLS 估计方法, 式(4)中共有 26 个未知数; 若使用顾及系数矩阵的 TLS 估计, 式(10)共有 14 个未知参数。因此, 总体最小二乘估计会成倍增加未知参数个数, 若使用顾及系数矩阵的 TLS 估计, 将会减少未知方程个数。上述 3 种不同估计的拟合精度见表 1。

表 1 不同估计方法拟合数据精度 Table 1 Accuracy of model fitting data mm							
观测 周期	原始 数据	计算值			残差		
		LS 估计	TLS 估计	顾及系数矩阵 TLS	LS 估计	TLS 估计	顾及系数矩阵 TLS
1	1.38	1.38	1.38	1.904	0	0	-0.524
2	3.31	2.457	2.469	3.332	0.853	0.841	-0.022
3	5.51	4.193	4.232	5.519	1.317	1.278	-0.009
4	8.88	6.711	6.789	8.453	2.169	2.091	0.427
5	12.25	9.852	9.969	11.757	2.398	2.281	0.493
6	15.07	13.108	13.241	14.819	1.962	1.829	0.251
7	17.08	15.896	16.016	17.186	1.184	1.064	-0.106
8	18.48	17.92	18.007	18.77	0.56	0.473	-0.29
9	19.38	19.219	19.272	19.732	0.161	0.108	-0.352
10	20.03	19.988	20.013	20.382	0.042	0.017	-0.352
11	20.76	20.421	20.428	20.735	0.339	0.332	0.025
12	21.10	20.659	20.654	20.949	0.441	0.446	0.151

在灰色 Verhulst 模型建模中常令预测初始值为观测数据的第 1 个值, 在本文中 LS 估计、TLS 估计未对初值进行改正。而顾及系数矩阵 TLS 估计初值是在残差平方和最小的条件下求出, 可知, 对初值进行最优求解有利于提高整体的拟合精度。LS 估计、TLS 估计和顾及系数矩阵结构 TLS 估计残差平方和分别为 18.819 1、16.938 0、1.130 1, 残差变化见图 2, 顾及系数矩阵结构 TLS 估计预测残差围绕零点上下波动, 残差较小。综合比较上述 3 种估计方法的预测残差可知: 在灰色 Verhulst 模型的不同估计方法中, 顾及系数矩阵结构 TLS 估计拟合

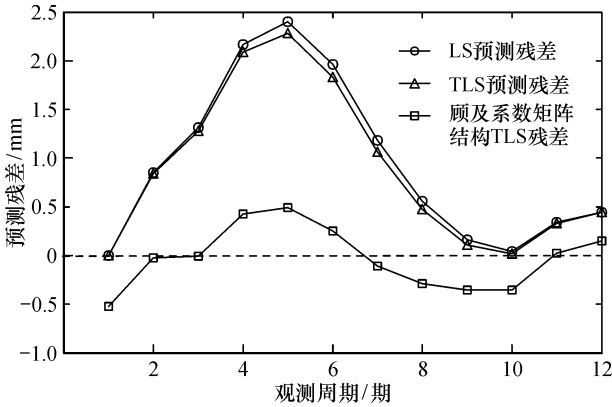


图2 灰色 Verhulst 模型不同估计方法残差变化
Fig.2 Residual changes in different estimation methods in Gray Verhulst model

精度高于LS、TLS估计。TLS估计拟合精度高于LS估计，说明灰色 Verhulst 模型系数矩阵中包含误差，对系数矩阵进行误差改正有利于提高拟合精度。但TLS估计和LS估计拟合预测值基本相同，表明观测值中所含噪声较少，系数矩阵改正量少。而顾及系数矩阵结构 TLS 估计拟合精度高于 TLS 估计，说明在观测方程数和顾及误差来源不变的情况下，减少未知参数个数、进行初值优化有利于提高拟合预测精度。

图3为3种不同估计方法预测值变化。可知，灰色 Verhulst 模型的LS估计、TLS估计和顾及系数矩阵结构的 TLS 估计预测值在15期后预测下沉量基本趋于零，且预测精度都靠近真实数据。试验表明，LS估计、TLS和顾及系数矩阵结构的 TLS 估计都不会改变灰色 Verhulst 模型的含有饱和状态的

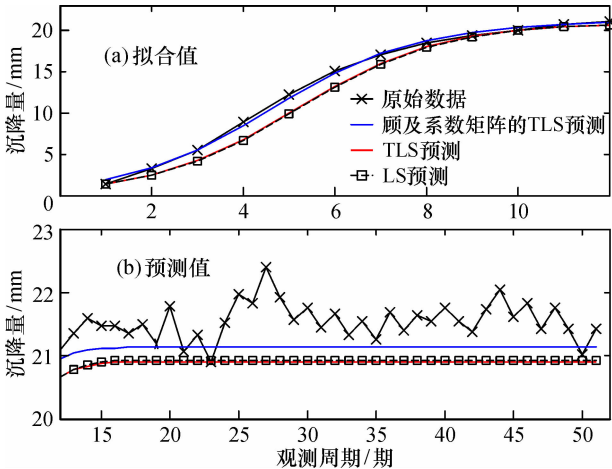


图3 灰色 Verhulst 模型不同估计方法拟合数据与预测数据变化

Fig.3 Gray Verhulst model predict data graphs change in different estimation methods

性质，预测稳定、精度高。LS估计、TLS估计和顾及系数矩阵结构的 TLS 估计预测的最终沉降量分别为20.935、20.913、21.136 mm。顾及系数矩阵结构的 TLS 估计预测值最接近最终路基沉降量，表明兼顾系数矩阵和观测向量误差、减少未知参数个数、进行初值优化有利于提高预测精度。

2.2 不同曲线拟合方法比较

为比较顾及系数矩阵结构灰色 Verhulst-TLS 估计和常用预测模型GM(1,1)、双曲线模型^[11]在高速铁路路基沉降中的预测精度，本次试验仍选用沉降监测A点的前12期数据建立模型，然后预测后40期，预测值见图4。双曲线模型拟合精度和预测精度最差，在预测后期仍以较大的增长速率增长，明显不符合路基沉降规律，说明双曲线法的线性变化受拟合数值的影响较大。GM(1,1)预测值虽然在拟合期具有较高的拟合精度，但在预测后期仍以一定速率增长，预测精度低。因此，GM(1,1)可以用于短期路基沉降预测，但长期预测不可靠。GM(1,1)和双曲线模型都没有将路基沉降具有饱和和发展过程纳入模型予以考虑，预测精度低。顾及系数矩阵结构灰色 Verhulst-TLS 估计具有灰色 Verhulst 模型包含饱和和发展过程的特性，并且在数据处理时考虑多种误差的影响，同时又适当的减少了未知参数，具有较高的预测精度。

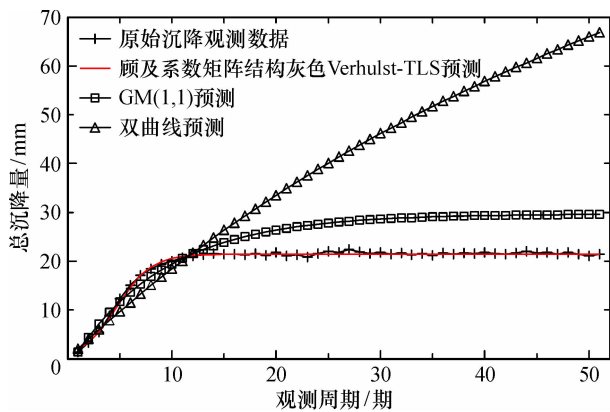


图4 GM(1,1)、双曲线法和本文方法预测数值对比
Fig.4 Predictive numerical comparison in GM(1,1), hyperbolic method and the new method

3 结论

本文提出的顾及系数矩阵结构的灰色 Verhulst-TLS 估计，并用新算法同灰色 Verhulst 模型LS估计、灰色 Verhulst 模型 TLS 估计、GM(1,1)、双曲线法进行预测值比较，通过各模型精度对比

分析得出如下结论:

(1) 路基沉降观测数据包含测量误差时, 灰色 Verhulst 模型中白化微分方程的系数矩阵同样包含误差, TLS 估计顾及系数矩阵和观测向量误差在数据处理方面考虑误差较 LS 估计全面, 同时, 预测精度高于 LS 估计。

(2) TLS 估计会成倍地增加白化微分方程中的未知参数, 这不仅会增加计算量, 还会降低模型的稳定性。灰色 Verhulst 模型系数矩阵的误差分布具有一定的规律, 运用顾及系数矩阵结构灰色 Verhulst-TLS 估计方法, 可以有效减少未知参数, 提高预测精度。

(3) 若直接令灰色 Verhulst 模型预测初值为观测值时, 会造成预测数据整体偏离真值, 因此预测初值应在残差平方和最小条件下求取。通过将顾及系数矩阵结构灰色 Verhulst-TLS 方法同 GM(1,1)模型、双曲线法预测精度对比发现: 双曲线法和 GM(1,1)模型都不包含饱和发展过程, 不符合高铁路基沉降变化趋势, GM(1,1)不适合作长期预测; 顾及系数矩阵结构灰色 Verhulst-TLS 算法线性变化符合路基沉降变化趋势, 参数少, 预测精度高, 能够快速准确的识别路基沉降真实曲线, 可以广泛应用于路基沉降预测。

参考文献:

- [1] Xu P L. The effect of errors-in-variables on variance component estimation[J]. Journal of Geodesy, 2016, 90(8): 681 - 701.
- [2] 肖霞林. 路基沉降变形评估与非等间隔灰色 Verhulst 模型[J]. 铁道建筑, 2011 (4): 86 - 88.
- [3] 龚循强, 李志林. 稳健加权总体最小二乘法 [J]. 测绘学报, 2014, 43 (9): 888 - 894.
- [4] 胡纪元, 文鸿雁, 周吕, 等. 婆婆以多尺度 kalman 滤波模型在高铁隧道沉降变形上的应用 [J]. 桂林理工大学学报, 2014, 34 (1): 79 - 84.
- [5] 鲁铁定. 总体最小二乘平差理论及其在测绘数据处理中的应用 [D]. 武汉: 武汉大学, 2010.
- [6] 陶叶青, 高井祥, 姚一飞. 基于中位数法的抗差总体最小二乘估计 [J]. 测绘学报, 2016, 45 (3): 297 - 301.
- [7] 曾文宪. 系数矩阵误差对 EIV 模型平差结果的影响研究 [D]. 武汉: 武汉大学, 2013.
- [8] 董巧玲. 不同误差影响模型下总体最小二乘法在多元线性回归中的应用研究 [D]. 太原: 太原理工大学, 2016.
- [9] 汪奇生, 叶险峰. 顾及系数矩阵结构性的加权总体最小二乘解算 [J]. 测绘科学, 2017, 42 (4): 133 - 136.
- [10] 赵焕焕, 菅利荣, 刘勇, 等. 基于背景值和初值优化的灰色 Verhulst 建模方法与应用 [J]. 系统工程, 2014, 32 (3): 149 - 153.
- [11] 文鸿雁, 聂光裕, 袁明月, 等. 基于小波去噪的改进 GM(1,1)模型在高铁线下工程中的应用 [J]. 桂林理工大学学报, 2017, 37 (1): 131 - 135.

Forecast analysis in roadbed used grey Verhulst model in total least squares estimation based on coefficient matrix structure

KANG Chuan-li¹, CHEN Yang¹, GU Jun-feng¹, ZHOU Lyu^{2,3}, XU Jun-ping⁴

(1. a. Guangxi Key Laboratory of Spatial Information and Geomatics; b. College of Geomatics and Geoinformation, Guilin University of Technology, Guilin 541006, China; 2. School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China; 3. Key Laboratory for Digital Land and Resources of Jiangxi Province, East China University of Technology, Nanchang 330013, China; 4. Hubei Tianshang Land Surveying And Planning Design Co. Ltd, Wuhan 430071, China)

Abstract: When there are errors in the observed value, the whitening equation coefficient matrix in the Gray Verhulst model has errors too. If least squares estimation is still used to calculate model parameters, the result is biased. Subgrade settlement prediction accuracy requirements are increased, therefore, a new method by TLS estimation based on the coefficient matrix structure is put forward. It is found that the new estimation method in this paper can reduce the numbers of unknown parameters, with better prediction accuracy, which can be widely used in roadbed settlement prediction.

Key words: coefficient matrix error structure; total least squares estimation (TLS); gray Verhulst model; roadbed settlement