

文章编号: 1674-9057(2019)03-0674-04

doi:10.3969/j.issn.1674-9057.2019.03.019

利用熵函数模型解算 GPS 高程异常

邓捷利, 陈天伟, 杨茜茜, 郑旭东

(桂林理工大学 a. 广西空间信息与测绘重点实验室; b. 测绘地理信息学院, 广西 桂林 541006)

摘要: 针对传统 GPS 高程异常拟合方法在地形复杂的地区拟合时模型对样本依赖程度不充分, 从而降低了拟合精度的情况, 通过最大熵原理分析模型系统对空间权重系数的依赖度, 由相应模型解算得到的权系数与点位关系相适应, 将该方法应用于 GPS 高程异常拟合。通过某区域 GPS 联测水准实例, 用已知高程异常与二次曲面法、多面函数法、加权均值法、最大熵法的拟合值比较, 结果表明: 在地形复杂的区域, 最大熵法有更好的表现。

关键词: 最大熵; 拟合; GPS 高程异常

中图分类号: P228

文献标志码: A

GPS 定位技术被广泛应用于测量工作中, GPS 测量获取的是大地高程, 但工程中通用的高程系统为正常高, 可采用水准测量方法获得。大地高与正常高之间存在差值, 称为高程异常, 即 $H = h + \xi$, 其中, H 表示大地高, h 为正常高, ξ 为高程异常。若能获取某点的高程异常就能将该点的 GPS 高程应用于工程之中, 所以确定高程异常在实际工程应用中尤为重要。

获取高程异常有多种方法, 其中一种是在进行 GPS 测量的同时, 再对部分点进行水准测量, 就可得知这部分点的高程异常, 通过这些已知高程异常的点, 就能插值或拟合出测区内其他点的高程异常^[1]。不同拟合方法适用条件不同, 控制点呈直线排列的情形时(如公路、铁路等), 使用曲线拟合方法; 当控制点呈面状分布且高程异常变化不明显才适合使用平面拟合; 地形复杂则使用曲面拟合; 还有一些常用拟合模型, 加权平均值法(多用于山区地形)、曲面样条法、神经网络法等^[2], 本文主要讨论通过加权均值法给出权系数初值再使用最大熵法插值。

待定点所使用的已知点是离散的、随机的, 所以插值得到高程异常变量也有着同样的性质。为使插值模型使用的数据充分离散, 让模型更稳健, 使用最大熵法。依据最大熵原理^[3], 当系统熵值最大, 模型误差将会最小。

1 加权均值法原理

加权均值法是先对已知值进行定权, 然后通过加权平均来求得期望值:

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot p_i / \sum_{i=1}^n p_i \quad (1)$$

式中, ξ 为待定点的高程异常; ξ_i 为已知点的高程异常; p_i 为已知点的权系数。 p_i 的确定方法有多种, 其中一种方法是通过已知点和未知点之间距离的函数来确定, 如反距离权、高斯距离权等^[4]。反距离加权中 p_i 有两种确定方法: 由参考点距离待定点的距离的平方确定 $p_i = 1/d_i^2$ 或者 $p_i = (R - d_i)^2/d_i^2$ (R 为最大搜索半径)。

该插值方法的核函数是具有地理意义的, 表

收稿日期: 2018-02-09

基金项目: 广西自然科学基金项目(2017GXNSFAA198308); 广西空间信息与测绘重点实验室项目(15-140-07-09)

作者简介: 邓捷利(1992—), 男, 硕士研究生, 测绘工程专业, 1874762102@qq.com。

通讯作者: 陈天伟, 硕士, 副教授, 675916588@qq.com。

引文格式: 邓捷利, 陈天伟, 杨茜茜, 等. 利用熵函数模型解算 GPS 高程异常 [J]. 桂林理工大学学报, 2019, 39(3): 674-677.

达了点间距对高程异常插值的影响。核函数具有地理意义的还有克里金法、杨赤中法、分形插值等，这些插值方法的权系数也适合作为最大熵法的权系数初值。

2 最大熵原理

最大熵理论的数学模型为

$$\begin{cases} \max S[p] = -\frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i; \\ \text{s. t. } \sum_{i=1}^n p_i g_j(x_i) = E(g_j), \end{cases} \quad (2)$$

其中： $S[p]$ 为系统的熵值； p_i 为该方法求得的权系数， $p_i \geq 0$ ； g_j 表示各阶统计矩函数； $E(g_j)$ 表示统计矩的期望； $i = 1, 2, \dots, n$ ； $j = 1, 2, \dots, m$ 。

对于待定点而言，联测点（已知高程异常）的分布是离散的、随机的，为了能反映出空间属性，则该最大熵模型的约束条件应该包括待定点高程异常点的数学期望值、方差。

模型系统的熵值：

$$S[p] = -(p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2 + \dots + p_n \ln p_n) / \ln 2; \quad (3)$$

约束条件为

$$\begin{cases} \text{s. t. } \sum_{i=1}^n p_i = 1, p_i \geq 0; \\ \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot p_i = E_1; \\ \sum_{i=1}^n (\xi_i - E_1)^2 \cdot p_i = E_2. \end{cases} \quad (4)$$

以上约束条件从上到下分别为 0、1、2 阶矩约束。 $E_1 = E(\xi)$ 是高程异常的期望值，因为随机变量的原点矩等于相应的样本矩^[5]，可由加权均值法算得。 E_2 可以通过高程异常样本值和 E_1 按计算方差估值的公式算得，此式即为二阶矩约束条件。本文的目的是在约束条件下使得系统的熵值 $S[p]$ 趋向于最大，使得模型最大程度地依赖样本，则模型更稳健。

待定点的高程异常值 ξ 的估计量为

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot p_i. \quad (5)$$

3 解算方法

最大熵模型是个附有限制条件的极值问题，由于该函数是非凸函数，难以使用拉格朗日乘数法求解，多用数值分析进行求解。因为传统的优化算法

存在一些缺点，对于某些目标函数不易求得最优解。

遗传算法是一种新兴算法，该算法解算快并且可以求出全局最优解。经过多年的研究，该方法因其多种优点得到了广泛的认同。遗传算法（GA）借鉴遗传学中自然选择进化过程来求解答案，该方法大致可以分为 4 个步骤：编码、初始群体的生成、适应度价值评估检查、操作算子^[6]。下文具体论述初始群体生成中的初值确定和适应度价值评估检查中如何处理约束的问题。

3.1 初值的确定

遗传算法的寻优性能会受到初值设置的影响，初值设置十分重要。本文熵函数待求值 p_i 是样本点（已知点）的权系数，而插值的方法多种多样，权系数的确定方法也复杂多样，基于上文加权均值法的优点，采用加权均值法所得到的结果作为一阶约束的样本矩，以反距离定权作为初值。

3.2 约束处理

遗传算法通常解决无约束问题，而的最大熵模型则包括了多个限制条件，因为没有限制条件的最大熵是没有意义的^[7]。工程中常使用罚函数法来处理约束问题。该方法是通过一个因子把目标函数与约束条件链接成新的无约束的目标函数，构造方法一般有两种：一种是采用加法形式 $val(x) = f(x) + c(x)$ ；另一种是乘法形式 $val(x) = f(x) \cdot c(x)$ ，其中 $c(x)$ 是惩罚项。当解在非可行域，就会进行惩戒，目标函数就会增大；当解可行，惩罚值就低，目标函数就变小，通过迭代使得目标函数最小，从而求出最优解。

4 实例分析

一般来说，地形平缓区域的建模精度要优于地形复杂区域，故实例采用地形复杂的数据。本文实验数据来源于黎剑^[8]对区域 GPS 高程异常拟合及建模方法的研究，对象为云南某地区，该地区为山区地形，共 27 个 GPS 水准联测点（大地高和正常高已知），剔除 3 个点，将 16 个点作为样本点，8 个点作为待定点。点分布如图 1 所示。

大地高和正常高相减可得到 8 个待定的高程异常，记录在表 1 的第 2 列。参照文献 [8] 中使用二次曲面拟合以及多面函数拟合得到的值记录在表 1 的 3、4 列。通过第 1 节所描述的方法即可得到某个待定点周围已知点的权系数，通过周围

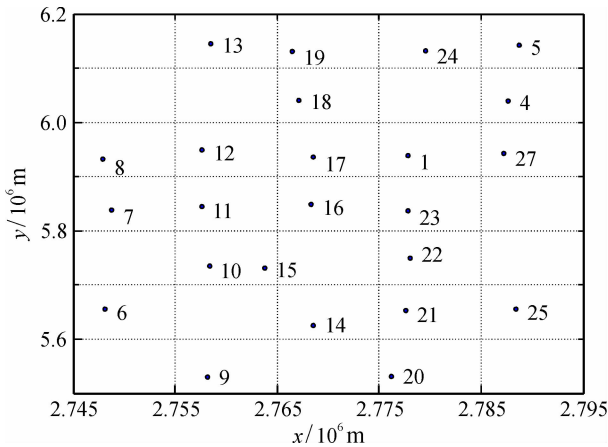


图 1 24 个点点位分布图
Fig. 1 Distribution view of the 24 points

已知点权系数以及高程异常即可获取该待定点高程异常的插值。在搜索方式采用邻域搜索圆，搜索点数为 4 个的条件下使用加权均值法，得到的插值记录在表 1 第 5 列。

表 1 高程异常以及 4 种方法的插值结果
Table 1 Elevation anomalies and interpolation results of four methods

点号	真值	二次曲面	多面函数	加权均值	最大熵法
4	31.972	31.886	31.798	31.941	31.927
7	32.312	32.286	32.292	32.227	32.269
10	32.649	32.432	32.519	32.553	32.533
12	32.088	32.204	32.151	32.123	32.105
16	32.278	32.27	32.298	32.228	32.257
18	32.029	32.109	32.036	32.085	32.08
21	32.472	32.437	32.494	32.452	32.458
23	32.172	32.202	32.204	32.166	32.153

在 Matlab 平台利用遗传算法函数进行编程，对最大熵模型进行解算，对该模型的解算本质就是附有限制条件的极值问题，因为函数本身性质，只能通过数值分析的方法进行求解。解算大致分为 3 个步骤：首先，将式(3)作为目标函数，将该函数编制函数文件 sangobj.m；然后，将式(4)的约束条件编为罚函数文件 sangcstr.m，其中边界约束 $p_i > 0$ 在主程序中列出；最后，设置初值，如本文第 3 节描述，使用加权均值法得到的权系数作为种群初值。由以上步骤解算得各 p_i 值为权系数。通过以上最大熵法获得的权系数和对应已知点的高程异常则可得到待定点的插值，结果见表 1 第 6 列。通过真值和拟合值之差可以得到残差，使用残差进行精度分析，结果见表 2。

表 2 各模型精度分析					
Table 2	Precision analysis of each model				cm
	二次曲面	多面函数	加权均值法	最大熵法	
最大残差	21.7	17.4	9.6	11.6	
最小残差	0.8	2	0.6	-1.7	
中误差	9.8	8.2	5.3	4.9	

加权均值法与前两种方法对比得出：由于加权均值法中反距离加权法的核函数具有地理意义，更能反映地形变化对高程异常的影响，并使用搜索半径进行分段拟合，所以加权均值法在地形较为复杂的地区比起前两种方法拟合精度要更高一些。加权均值法在 7 号点拟合表现差于前两种方法，是因为 7 号点位于图幅边缘，该点并未被已知点包围，已知点分布不均匀，所以导致插值精度降低。16 号点因为该点附近的样本点高程异常都比较相近，可推测出 16 号附近的高程异常变化不大，所以各种拟合方法差别不大。21 号点各拟合方法精度也比较接近，与 16 号点相似，该点周围高程异常差变化不明显，且该点周围的 4 个已知点接近对称分布，对该点的拟合如同对相近的数值求均值，所以各种拟合方法差别很小。

对比加权均值法和最大熵法得出：使用最大熵模型结合遗传算法得出的插值数据精度大多高于加权均值法，虽然在最大残差、最小残差上最大熵法并未表现出优越性，但最大熵法中误差较低，比起加权均值法，其整体更接近真值，只有在少部分点表现出较差的结果，如 23 号点改进后比改进前要差，因为该点附近的已知点分布不均匀，多位于该点上方，该点的搜索范围下方缺少已知点信息，由于对样本依赖程度较大，插值结果偏向下方已知点的信息，精度反而变低。

5 结束语

当已知点分布较为均匀时，与核函数没有地理意义的二次曲面拟合法以及多面函数法等相比，采用加权平均值法，即使山区地形大地水准面变化较大，也能较好地解决高程异常拟合问题。最大熵法最大程度地排除了主观因素的影响，让模型最大程度地依赖样本数据，使得模型更加稳健。与加权平均值法相比，最大熵法拟合出的数据整体上更为靠近真值，证明在地形复杂的区域使用最大熵法进行拟合有着良好的表现。

参考文献：

[1] 程义军, 孙海燕. 薄板样条与大区域高程异常插值 [J]. 测绘科学, 2008, 33 (4): 42 - 44.

[2] 简程航. GPS 高程拟合方法研究及其工程应用 [D]. 北京: 中国地质大学, 2014.

[3] 陈天伟, 卢献健, 江海东. 应用最大熵方法改进克里金负权系数 [J]. 桂林理工大学学报, 2015, 35 (2): 340 - 342.

[4] 卢华兴. DEM 误差模型研究 [D]. 南京: 南京师范大学, 2008.

[5] 俞礼军, 严海, 严宝杰. 最大熵原理在交通流统计分布模型中的应用 [J]. 交通运输工程学报, 2001, 1 (3): 91 - 94.

[6] 陈天伟. 最大熵模型结合遗传算法解算 DEM 插值权系数 [J]. 测绘科学, 2017, 42 (1): 25 - 28.

[7] 程亮. 最大熵原理与最小熵方法在测量数据处理中的应用 [D]. 成都: 电子科技大学, 2008.

[8] 黎剑. 区域 GPS 高程异常拟合及建模方法研究 [D]. 昆明: 昆明理工大学, 2013.

Solving GPS elevation anomaly with entropy function model

DENG Jie-li, CHEN Tian-wei, YANG Qian-qian, ZHENG Xu-dong
(a. College of Geomatics and Geoinformation; b. Guangxi Key Laboratory of Spatial Information and Geomatics, Guilin University of Technology, Guilin 541006, China)

Abstract: Traditional GPS elevation anomaly fitting method is not fully dependent on the sample when fitting in a terrain with complex terrain. In order to reduce the fitting accuracy, the maximum entropy principle is used to analyze the dependence degree of the model system on the spatial weight coefficient. The weight coefficient calculated by the corresponding model is adapted to the point relationship, and used in GPS elevation anomaly fitting. In an engineering example, the fitting accuracy of quadric surface method, multi-faceted function method, weighted average method and maximum entropy method are compared. The results show that the maximum entropy method performs better in areas with complex terrain.

Key words: ME; fitting; GPS elevation anomaly