

GPS 高程转换模型

王新桥¹, 黄良珂^{1b,1c}, 刘立龙¹, 黄华娟²

(1. 桂林理工大学 a. 广西矿冶与环境科学实验中心; b. 测绘地理信息学院;

c. 广西空间信息与测绘重点实验室, 广西 桂林 541004; 2. 广西水利电力职业技术学院, 南宁 530023)

摘要:传统二次曲面模型用于 GPS 高程转换时容易出现法方程病态, 使用岭估计法能消除其病态性, 但是目前岭参数 k 的确定缺乏良好的方法, k 的不同取值会得到不同转换精度, 提出二次曲面重心化模型和二次曲面归一化模型用于 GPS 高程转换。通过实测数据分析, 两种模型均能消除法方程病态性, 且具有较高的 GPS 高程转换精度。

关键词:GPS 高程; 二次曲面归一化模型; 二次曲面重心化模型; 岭估计

中图分类号: P223.7

文献标志码: A

0 引言

随着 GPS 技术不断发展, GPS 测量已成为现代测量中一个全新的工具。GPS 获取的高程是基于 WGS 84 椭球的大地高 H_{84} , 而实际测量中应用的是基于似大地水准面的正常高, 因此需要将大地高转换为正常高 $H_{正}$, 大地高与正常高之差称为高程异常 ξ , 表示为^[1]:

$$\xi = H_{84} - H_{正}。 \quad (1)$$

为此, 要将大地高转换为正常高, 需要对高程异常进行估计。目前常见的算法主要有曲面拟合法、Kriging 插值法^[2]、BP 神经网络法^[3-4]、分区拟合法^[5-6]等。单一的曲面拟合法计算简单, 但只适用于小区域平坦地区, 当法方程呈现病态时, 会造成转换结果的较大偏差; Kriging 法具有较高的 GPS 高程转换精度, 但是需要的已知点较多, 且计算量较大; BP 神经网络法对 GPS 高程转换已知点要求较少, 能有效解决已知点数量较少的测区 GPS 高程转换问题, 但有时会存在训练陷入瘫痪和收敛速度慢的问题, 影响 GPS 高程转换效率。针对单一模型的不足, 文献 [7] 利用曲面

拟合和 BP 神经网络相结合, 文献 [8] 将小波分析和 Kriging 法相结合进行 GPS 高程转换, 数值结果表明具有较高的转换精度。针对大区域或者地形变化复杂区域, 文献 [5-6] 提出分区拟合的思想进行 GPS 高程转换, 且对不同分区进行平滑连接, 取得了较好的效果。针对传统二次曲面模型用于 GPS 高程转换时容易出现法方程病态, 一般使用岭估计法消除其病态性, 但是目前岭参数 k 的确定没有一种良好的方法, 且 k 的不同取值会得到不同转换精度, 由此本文提出二次曲面重心化模型和二次曲面归一化模型用于 GPS 高程转换, 通过实测数据分析其转换精度, 并探讨两种模型抵抗法方程病态的能力和在较大区域 GPS 高程转换适用情况。

1 模型的提出和岭估计

1.1 二次曲面重心化模型

二次曲面拟合法是 GPS 高程拟合中最常用的方法之一, 其表达为

$$\xi_i(x, y) = a_0 + a_1x_i + a_2y_i + a_3x_iy_i + a_4x_i^2 + a_5y_i^2。 \quad (2)$$

收稿日期: 2012-09-26

基金项目: 国家自然科学基金项目 (41064001); 广西自然科学基金项目 (2012GXNSFGA060001; 2012GXNSFAA053183); 广西空间信息与测绘重点实验室项目 (桂科能 1207115-07); 广西研究生教育创新计划项目 (YCSZ2013077)

作者简介: 王新桥 (1963—), 男, 讲师, 研究方向: 测量数据处理。

引文格式: 王新桥, 黄良珂, 刘立龙, 等. GPS 高程转换模型 [J]. 桂林理工大学学报, 2013, 33 (3): 504-508.

式中: $a_i (i = 0, 1, 2 \dots 5)$ 为多项式系数, (x_i, y_i) 为 GPS 平面坐标, $\xi_i(x, y)$ 为高程异常值。因此, 根据最小二乘原理可求得参数 $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, 5)$ 的解为

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_5 \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} \xi_1(x, y) \\ \xi_2(x, y) \\ \xi_3(x, y) \\ \dots \\ \xi_n(x, y) \end{bmatrix},$$

$$\text{其中, } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & x_1^2 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & x_2^2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & x_3^2 & y_3^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & x_n y_n & x_n^2 & y_n^2 \end{bmatrix}。$$

由于坐标值与高程异常的值相差较大, 因此在计算法方程系数阵时会造成精度损失, 容易引起法方程 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 病态, 为此, 本文对二次曲面重心化, 得到二次曲面重心化模型表达式为

$$\xi_i(x, y) - \bar{\xi} = b_0 + b_1(x_i - \bar{x}) + b_2(y_i - \bar{y}) + b_3(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) + b_4(x_i - \bar{x})^2 + b_5(y_i - \bar{y})^2, \quad (3)$$

$$\text{其中, } \bar{\xi} = \frac{\sum_{i=1}^N \xi_i(x, y)}{N}, \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}, \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N}。 \quad (4)$$

式中: $b_i (i = 0, 1, 2, \dots, 5)$ 为重心化后多项式系数; $\bar{\xi}, \bar{x}, \bar{y}$ 分别为重心高程异常和重心坐标; N 为已知点个数。因此, 二次曲面模型及其重心化模型至少需要 6 个 GPS 高程转换已知点, 当已知点多于 6 个时, 可得到参数 $b_i (i = 0, 1, 2, \dots, 5)$ 的最小二乘解为 $\hat{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{L}_1$, 其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 - \bar{x} & y_1 - \bar{y} & (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) & (x_1 - \bar{x})^2 & (y_1 - \bar{y})^2 \\ 1 & x_2 - \bar{x} & y_2 - \bar{y} & (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) & (x_2 - \bar{x})^2 & (y_2 - \bar{y})^2 \\ 1 & x_3 - \bar{x} & y_3 - \bar{y} & (x_3 - \bar{x})(y_3 - \bar{y}) & (x_3 - \bar{x})^2 & (y_3 - \bar{y})^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n - \bar{x} & y_n - \bar{y} & (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}) & (x_n - \bar{x})^2 & (y_n - \bar{y})^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} \xi_1(x, y) - \bar{\xi} \\ \xi_2(x, y) - \bar{\xi} \\ \xi_3(x, y) - \bar{\xi} \\ \dots \\ \xi_n(x, y) - \bar{\xi} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{x}}_1 = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_5 \end{bmatrix}。$$

1.2 二次曲面归一化模型

针对上述分析, 可以对二次曲面模型归一化, 得到二次曲面归一化模型其表达式为

$$\psi_i = c_0 + c_1 X_i + c_2 Y_i + c_3 X_i Y_i + c_4 X_i^2 + c_5 Y_i^2。 \quad (5)$$

其中,

$$\psi_i = \frac{\xi_i - \xi_{\min}}{\xi_{\max} - \xi_{\min}}, X_i = \frac{x_i - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, Y_i = \frac{y_i - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}。 \quad (6)$$

式中: $c_i (i = 0, 1, 2 \dots 5)$ 为归一化后多项式系数; ξ_i 为高程异常; ψ_i 为 ξ_i 归一化高程异常值; X_i 为 x_i 归一化坐标; Y_i 为 y_i 归一化坐标; ξ_{\min}, ξ_{\max} 分别为已知高程异常 ξ_i 的最小值和最大值; x_{\min}, x_{\max} 分别为已知 x_i 坐标的最小值和最大值; y_{\min}, y_{\max} 分别为已知 y_i 坐标的最小值和最大值。显然, 至少需要 6 个已知点才能求解 $c_i (i = 0, 1, 2 \dots 5)$ 参数, 当已知点多于 6 个时, 参数 $c_i (i = 0, 1, 2 \dots 5)$ 最小二乘解为 $\hat{\mathbf{x}}_2 = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{L}_2$, 其中

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad \dots \quad c_5]^T,$$

$$\mathbf{L}_2 = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \dots \quad \psi_n]^T,$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 & X_1 Y_1 & X_1^2 & Y_1^2 \\ 1 & X_2 & Y_2 & X_2 Y_2 & X_2^2 & Y_2^2 \\ 1 & X_3 & Y_3 & X_3 Y_3 & X_3^2 & Y_3^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_n & Y_n & X_n Y_n & X_n^2 & Y_n^2 \end{bmatrix}。$$

1.3 岭估计

利用二次曲面模型进行 GPS 高程转换时, 其法方程系数阵容易出现病态, 利用最小二乘直接求解会导致结果不稳定, 为此, 采用岭估计法^[9]对病态方程进行求解。设观测方程为

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L}, \quad (7)$$

则参数 $\hat{\mathbf{X}}$ 的最小二乘估计为

$$\hat{\mathbf{X}}_{LS} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L}_0。 \quad (8)$$

如果矩阵 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 的条件数较大时, 矩阵呈病态性, 采用岭估计求解参数表达式为

$$\hat{\mathbf{X}}(k) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + k\mathbf{E})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{L} \quad (9)$$

式中: k 为岭参数, \mathbf{E} 为单位矩阵。

2 算例分析

2.1 算例 1

为了验证二次曲面重心化和归一化模型在 GPS 高程转换的可行性, 本文选取文献 [10] 中

14 个实测 GPS 水准点数据作为算例 1 实验数据。该实验区域沿江地形平缓,面积约 10 km²,点位分布如图 1 所示。均匀选取其中 8 个 GPS 水准点作为已知点,其余 6 个点作为检核,运用 MATLAB 7.0 计算,结果如表 1 所示。

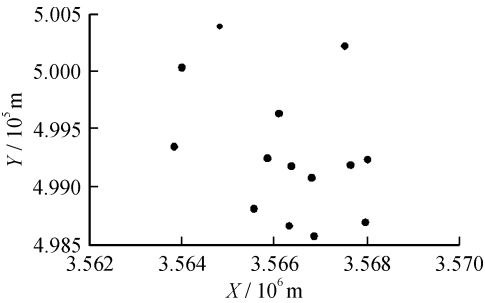


图 1 算例 1 点位分布
Fig. 1 Points location of Case 1

表 1 算例 1 不同方法 GPS 高程转换残差对比
Table 1 Comparison of GPS elevation fitting errors
in different methods for Case 1 m

点号	二次曲面法	岭估计法	二次曲面 重心化法	二次曲面 归一化法
4	-0.432 6	0.004 9	0.000 6	0.000 6
5	-0.433 0	-0.002 2	-0.000 1	-0.000 1
6	-0.433 9	-0.001 4	-0.000 9	-0.000 9
9	-0.432 4	0.003 8	0.000 2	0.000 2
10	-0.434 2	-0.001 9	-0.000 8	-0.000 8
21	-0.432 2	0.005 3	0.001 1	0.001 1
22	-0.434 1	-0.001 3	-0.000 2	-0.000 2
26	-0.433 7	0.004 0	0.000 0	0.000 0
* 2	-0.423 4	-0.006 2	0.006 6	0.009 6
* 8	-0.430 8	-0.002 6	0.002 4	0.002 4
* 11	-0.434 2	-0.002 9	-0.001 6	-0.001 5
* 20	-0.429 4	-0.002 5	0.004 2	0.004 2
* 23	-0.434 2	0.001 9	-0.000 6	-0.000 6
* 28	-0.430 3	0.002 6	0.003 5	0.003 4

注: * 号点为 GPS 高程转换检核点,其余为已知点。

为了进一步研究区域内已知点分布对改进后模型拟合精度的影响,本文对区域已知点分布分为 4 种方案进行分析,精度统计如表 2 所示。

表 2 算例 1 GPS 高程转换不同方法精度统计
Table 2 GPS elevation fitting precision in different
methods for Case 1 m

	二次曲面法	岭估计法	二次曲面 重心化法	二次曲面 归一化法
内符合精度	0.433 3	0.003 4	0.000 6	0.000 6
外符合精度	0.430 4	0.003 4	0.003 7	0.004 6
中误差	0.432 0	0.003 4	0.002 5	0.003 1
平均误差	0.432 0	0.003 1	0.001 6	0.001 8

由表 1 和表 2 知,二次曲面法残差较大为 432 mm,原因是利用二次曲面进行 GPS 高程转换时法方程出现病态,从而导致求解结果不稳定。为此,本文利用岭估计法进行估计,消除法方程病态后,转换结果得到了有效的改善。此外,对岭参数 k 的取值进行了分析,当 k 取值从 0 ~ 3.0 时,得到岭估计法的 GPS 高程转换中误差如图 2 所示。当 $k = 1.0$ 时转换中误差趋于稳定,当 $k = 2.1$ 时转换中误差达到最小值 3.4 mm,因此,可考虑取 $k = 2.1$ 为本算例的岭参数值。而二次曲面重心化模型和归一化模型转换中误差分别为 2.5 和 3.1 mm,精度相当,均达到了 mm 级,且精度优于岭估计法。由于 GPS 高程转换点的坐标值与高程异常值相差较大,直接运用二次曲面模型计算时会导致矩阵接近奇异状态,从而引起法方程病态^[11],将坐标和高程异常重心化和归一化后,能有效地消除法方程的病态性,故能提高 GPS 高程转换精度。

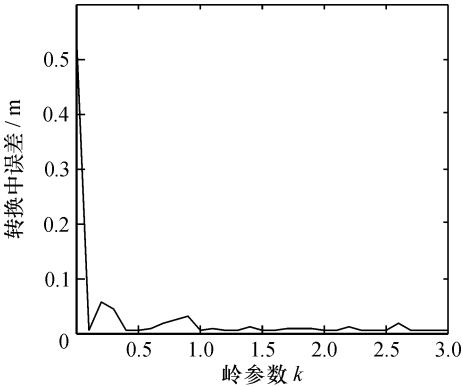


图 2 算例 1 不同岭参数的转换中误差
Fig. 2 RMS of transformation in different ridge
parameters of Case 1

由表 3 可知,改进模型在 4 种不同已知点分布中,其内符合精度相当,均达到了 mm 级精度。然而,当已知点分布在测区内部或测区一端时,外符合精度较差,当已知点均匀分布时,拟合精度最佳,外符合精度达到了 mm 级。因此,在 GPS 高程拟合中,应均匀选取测区已知点。

2.2 算例 2

为了验证二次曲面重心化模型和二次曲面归一化模型在较大区域的适用情况,本文选取文献 [12] 中 9 个 GPS 水准点数据作为算例 2 的实验数据。该实验区位于成都市成华区、龙潭镇、十陵镇等行政区,面积约 20 km²,平均海拔为 500 m,点

表 3 已知点分布对改进模型精度统计					
Table 3 Precision statistics in different schemes for improved model					
已知点分布	已知点 点号	二次曲面重 心化模型		二次曲面归 一化模型	
		内符合 精度	外符合 精度	内符合 精度	外符合 精度
		m	m	m	m
测区 一端	4,5,9,10,11, 22,26,28	0.002 6	0.023 9	0.002 6	0.022 8
测区 内部	2,4,6,8,10, 20,21,23	0.001 4	0.036 6	0.001 4	0.036 8
测区 外围	2,4,5,6, 8,9,10,11	0.000 8	0.004 9	0.0008	0.005 1
均匀 分布	4,5,6,9, 10,21,22,26	0.000 6	0.003 7	0.000 6	0.004 6

位分布如图 3 所示。均匀选取其中 7 个 GPS 水准点为已知点，其余 2 个为检核使用，计算结果如表 4 所示。

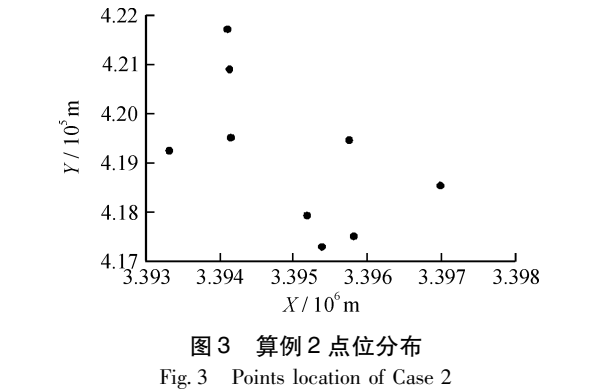


表 4 算例 2 不同方法 GPS 高程转换残差对比				
Table 4 Comparison of GPS elevation fitting errors				
in different methods for Case 2				
点号	二次曲 面法	岭估 计法	二次曲面 重心化法	二次曲面 归一化法
G3	19.052 8	-0.017 2	-0.012 0	-0.012 0
G4	19.080 0	0.030 7	0.017 0	0.017 4
* J2	18.970 7	-0.026 4	-0.050 3	-0.050 6
J3	19.082 2	0.019 0	0.001 4	0.001 2
* J8	19.033 8	0.018 7	-0.027 2	-0.027 6
J9	19.061 4	0.034 3	-0.008 2	-0.008 1
J12	19.087 9	-0.011 1	0.006 0	0.006 1
J13	19.066 9	-0.005 3	-0.000 3	-0.000 3
J16	19.071 2	-0.034 7	-0.004 6	-0.004 4

注：* 号点为 GPS 高程转换检核点，其余为已知点。

由表 4 和表 5 可知，利用二次曲面法进行 GPS 高程转换时法方程呈现高度病态，严重扭曲了解算结果，中误差高达 19.056 m，采用岭估计法估计后，其转换结果得到明显改善。对岭参数 k 取

值在 0.01 ~ 3.01 时对应的转换中误差如图 4 所示，当 $k = 2.1$ 时转换中误差相对稳定，但是本算例 $k = 0.21$ 时转换中误差最小为 24 mm，因此，可考虑取 $k = 0.21$ 为算例 2 的岭参数值。对于二次曲面重心化模型和二次曲面归一化模型，其转换中误差分别为 20.6 和 20.8 mm，精度优于岭估计法。

表 5 算例 2 GPS 高程转换不同方法精度统计				
Table 5 Precision statistics of GPS elevation fitting				
precision in different methods for Case 2				
	二次曲 面法	岭估 计法	二次曲面 重心化法	二次曲面 归一化法
内符合精度	19.071 8	0.024 3	0.008 9	0.009 0
外符合精度	19.002 3	0.022 9	0.040 4	0.040 8
中误差	19.056 3	0.024 0	0.020 6	0.020 8
平均误差	19.056 3	0.021 9	0.014 1	0.014 2

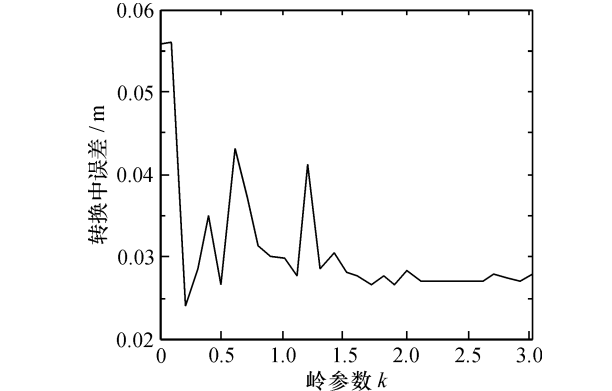


图 4 算例 2 不同岭参数的转换中误差
Fig. 4 RMS of transformation in different ridge parameters of Case 2

由算例 1 和算例 2 可知，利用二次曲面模型进行 GPS 高程转换时其法方程容易呈现病态，造成估计结果不稳定，使用二次曲面重心化模型和二次曲面归一化模型，能有效地消除法方程的病态性，且能提高 GPS 高程转换精度。此外，两种模型使用于较大区域时，也能保证 cm 级精度。

3 结束语

直接运用二次曲面模型进行 GPS 高程转换时其法方程容易呈现病态，从而导致转换结果不稳定，经过岭估计法估计后，其转换精度得到有效改善，岭参数 k 不同取值会影响转换精度，本文算例 1 和算例 2 岭参数 k 取值分别为 2.1 和 0.21 时其转换精度最优。使用二次曲面重心化模型和

二次曲面归一化模型, 均匀选取测区已知点能有效消除法方程的病态性, 且能提高 GPS 高程转换精度。此外, 两种模型使用于较大区域 GPS 高程转换时, 也能保证 cm 级精度。因此, 采用二次曲面重心化模型和二次曲面归一化模型进行 GPS 高程转换具有一定的优越性。

参考文献:

- [1] 刘基余. GPS 卫星导航定位原理与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [2] 李明, 高星伟, 文汉江, 等. Kriging 方法在 GPS 水准拟合中的应用 [J]. 测绘科学, 2009, 34 (1): 106–107.
- [3] 韩硕. 神经网络在 GPS 高程拟合中的应用 [J]. 测绘通报, 2006 (4): 48–50.
- [4] 吴良才, 危志明. 基于遗传神经网络的 GPS 高程转换方法 [J]. 桂林理工大学学报, 2010, 30 (1): 99–102.
- [5] 高伟, 徐绍铨. GPS 高程分区拟合转换正常高的研究 [J]. 武汉大学学报: 信息科学版, 2004, 29 (10): 908–911.
- [6] 丁海勇, 杨延珍, 王新志, 等. 基于移动曲面拟合方法的 GPS 高程转换 [J]. 大地测量与地球动力学, 2010, 30 (6): 82–85.
- [7] 侯东阳, 张书毕. 基于平面拟合和 BP 神经网络组合方法的 GPS 高程转换 [J]. 大地测量与地球动力学, 2010, 30 (6): 91–94.
- [8] 焦明连, 蒋延臣. 基于小波分析和 Kriging 估计的 GPS 高程转换 [J]. 大地测量与地球动力学, 2008, (2): 100–103.
- [9] 崔希璋, 於宗俦, 陶本藻, 等. 广义测量平差 [M]. 2 版. 武汉: 武汉大学出版社, 2009.
- [10] 孙正明, 高井祥, 王坚, 等. 最小二乘配置法在 GPS 高程异常推估中的应用 [J]. 测绘科学, 2007, 32 (6): 102–103.
- [11] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析 [M]. 4 版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006.
- [12] 杨江波, 李为乐, 余代俊, 等. GPS 高程拟合方法的实验研究 [J]. 测绘科学, 2009, 34 (3): 55–55.

GPS Elevation Conversion Model

WANG Xin-qiao¹, HUANG Liang-ke^{1b,1c}, LIU Li-long¹, HUANG Hua-juan²

(1. a. *Guangxi Scientific Experiment Center of Mining, Metallurgy and Environment*; b. *College of Geomatic Engineering and Geoinformatics*; c. *Guangxi Key Laboratory of Spatial Information and Geomatics, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China*; 2. *Guangxi College of Water Resources and Electric Power, Nanning 530023, China*)

Abstract: The normal equation may present the ill-conditioned problems when used to convert GPS elevation by traditional quadric model, and the ill-conditioned problems can be eliminated by ridge estimate. However, a better method to estimate the ridge parameter k was absent. The variations of the ridge parameter k would lead to different accuracies for GPS elevation conversion. Therefore, in this paper quadric centralized model and quadric normalized model are proposed to convert GPS elevation. The analysis of the measured data shows that the ill-conditioned problems can be eliminated for the normal equation, with a high conversion precision.

Key words: GPS elevation; quadric normalized model; quadric centralized model; ridge estimate