文章编号: 1674 - 9057(2014)04 - 0782 - 03

doi:10. 3969/j. issn. 1674 - 9057. 2014. 04. 031

强混合随机变量序列的一个几乎处处中心极限定理

冯凤香

(桂林理工大学 理学院, 广西 桂林 541004)

摘要: 研究了强混合随机变量序列的几乎处处中心极限定理。利用子序列等方法, 获得了强混合随机变量序列几乎处处中心极限定理的一个较优结果。

关键词: α -混合随机变量序列; 中心极限定理; 几乎处处中心极限定理

中图分类号: O211.4

文献标志码: A

0 引言

几乎处处中心极限定理(ASCLT)最早是分别由 Brosamler^[1]和 Schatte^[2]独立提出并且开始研究的,最基本结果是由文献[3]给出的。设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 是 i. i. d. 随机变量序列,且 $EX = 0, EX^2 = 1$ 。则 $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} I\left(\frac{S_k}{\sqrt{k}} \leq x\right) = \Phi(x), \text{ a. s. }.$$

其中: $I(\cdot)$ 为示性函数; $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数。

对于独立同分布随机变量序列的几乎处处中心极限定理,前人已经作了很多研究。近年来很多研究者感兴趣于混合随机变量序列的几乎中心极限定理^[4]。对于强混合随机变量序列:文献[5]证明了在强混合和正相伴条件下的几乎处处中心极限定理;文献[6]讨论了强混合序列部分和乘积的几乎处处中心极限定理;文献[7]证明了一个关于随机元序列的几乎处处中心极限定理的一般结果,并得到强混合序列的一个几乎处处中心极限定理:

设 $\{X, X_n, n \geq 1\}$ 是一中心化的实值平稳 α -混合随机变量序列,且对某一 $r > 2$ 和常数 $\beta > 0$, 有 $E|X_n|^r < \infty$ 和 $\alpha(k) \leq ak^{-\beta}$, 其中 a 是一正常数, $\beta > \frac{r}{r-2}$, 那么对 $\sigma^2 = \sum_{k=1}^n \text{cov}(X_0, X_k) > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} I\left(\frac{S_k}{\sigma \sqrt{k}} \leq x\right) = \Phi(x), \text{ a. s. }.$$

设 F 和 R 是 (Ω, β, P) 上的任意两个 σ -代数,令 $\alpha(F, R) = \sup_{A \in F, B \in R} |P(AB) - P(A)P(B)|$, 又记 $\alpha(n) = \sup_{k \in \mathbf{N}} \alpha(F_1^k, F_{k+n}^\infty)$, 这里 $F_a^b = \sigma(X_i, a \leq i \leq b)$ 。如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(n) = 0$, 则称 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是强混合随机变量序列或 α -混合随机变量序列。

本文进一步讨论 α -混合(强混合)随机变量序列的几乎处处中心极限定理,获得了 α -混合随机变量序列的几乎处处中心极限定理的更优结果。

1 主要结果及证明

定理 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是强平稳的强混合随机变量序列,其混合系数满足 $\alpha(n) \ll (\log n)^{-1-\delta}, \delta > 0$,

记 $S_n = \sum_{j=1}^n X_j, \sigma_n^2 = \text{var } S_n$, 设 $EX_1 = 0, EX_1^2 = 1, \sigma_n^2 = nh(n)$, 其中 $h(n)$ 是缓变函数, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{E|S_n|} \leq \sqrt{\pi/2}$, 设 $\alpha \in [0, 1)$, 令 $d_n = \frac{1}{n} \exp((\log$

$n)^\alpha)$, $D_N = \sum_{n=1}^N d_n$, 则当 $\alpha \in [0, 1/2)$ 和 $\forall x \in \mathbf{R}$ 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{D_N} \sum_{n=1}^N d_n I\left(\frac{S_n}{\sigma_n} \leq x\right) = \Phi(x), \text{ a. s. }; \quad (1)$$

当 $\alpha \in [0, 1)$ 和 $\forall x \in \mathbf{R}$

收稿日期: 2012 - 06 - 05

基金项目: 国家自然科学基金项目 (11361019)

作者简介: 冯凤香 (1975—), 女, 博士研究生, 副教授, 研究方向: 概率极限理论。

引文格式: 冯凤香: 强混合随机变量序列的一个几乎处处中心极限定理 [J]. 桂林理工大学学报, 2014, 34 (4): 782 - 784.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{D_N} \sum_{n=1}^N d_n I\left(\frac{S_n}{\sigma_n} \leq x\right) \stackrel{p}{=} \Phi(x). \quad (2)$$

$\Phi(x)$ 为标准正态分布函数。

在这节中一律以 C 记与 n 无关的正常数, “ $\ll$ ”表示通常的大“ O ”。为证明定理, 需要下列引理。

引理 1 当 $\alpha \in [0, 1)$, D_n 如定理给出, 则存在某正常数 C , 使得

$$D_n \sim C(\log n)^{1-\alpha} \exp((\log n)^\alpha). \quad (3)$$

证明 当 $\alpha \in [0, 1)$, 定义

$$F(x) = (\log x)^{1-\alpha} \exp((\log x)^\alpha);$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \exp((\log x)^\alpha),$$

则 $d_k \sim f(k)$ 且由 $D_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ 。又由 $\exp((\log x)^\alpha)$ 是慢变化函数, 所以 $f(x) = \frac{1}{x} \exp((\log x)^\alpha)$

单调递减且趋于零, 从而有

$$D_n = \sum_{k=1}^n d_k = \sum_{k=1}^n f(k) \sim \int_1^n f(x) dx.$$

另一方面

$$F'(x) = \exp((\log x)^\alpha) \left(\frac{\alpha}{x} + \frac{1-\alpha}{x} (\log x)^{-\alpha} \right) = \alpha f(x) + g(x),$$

其中

$$g(x) = \exp((\log x)^\alpha) \left(\frac{1-\alpha}{x} (\log x)^{-\alpha} \right).$$

显然 $g = o(f)$, 所以

$$D_n = \sum_{k=1}^n f(k) \sim \int_1^n f(x) dx \sim \frac{1}{\alpha} \int_1^n F'(x) dx \sim C(\log n)^{1-\alpha} \exp((\log n)^\alpha).$$

引理 2 (参见文献 [8], p. 41) 在定理的条件下, 有

$$S_n/\sigma_n \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

注: 该引理 2 是由 Dehling, Denker 和 Philipp (1986) 给出的中心极限定理, 本文就是研究该中心极限定理的相应几乎处处中心极限定理。

定理的证明 下面先证明式 (1)。

记 Λ 为有界连续的 Lipschitz 函数构成的集合, $\forall f \in \Lambda$, 式(1) 等价于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k f(S_k/\sigma_k) = Ef(N), \text{ a. s. ,}$$

又因为 $f \in \Lambda$, 式(4) 等价于

$$Ef(S_n/\sigma_n) \rightarrow Ef(N), \text{ a. s. , } n \rightarrow \infty.$$

所以为了证明式(1), 只需要证明

$$\frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k (f(S_k/\sigma_k) - Ef(S_k/\sigma_k)) \rightarrow 0, \text{ a. s. , } n \rightarrow \infty.$$

$$\text{记 } \xi_k = f(S_k/\sigma_k) - Ef(S_k/\sigma_k), \quad T_n = \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n d_k \xi_k.$$

即要证 $T_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0, n \rightarrow \infty$ 。

对于 $l > 2k$, 有

$$\begin{aligned} |E(\xi_k \xi_l)| &= \left| \text{cov}\left(f\left(\frac{S_k}{\sigma_k}\right), f\left(\frac{S_l}{\sigma_l}\right)\right) \right| \\ &= \left| \text{cov}\left(f\left(\frac{S_k}{\sigma_k}\right), f\left(\frac{S_l}{\sigma_l}\right) - f\left(\frac{S_l - S_{2k}}{\sigma_l}\right)\right) \right| + \\ &\quad \left| \text{cov}\left(f\left(\frac{S_k}{\sigma_k}\right), f\left(\frac{S_l - S_{2k}}{\sigma_l}\right)\right) \right|. \end{aligned}$$

由强混合的协方差不等式(参见文献 [7], p. 5) 和 f 的有界性, 有

$$\text{cov}\left(f\left(\frac{S_k}{\sigma_k}\right), f\left(\frac{S_l - S_{2k}}{\sigma_l}\right)\right) \ll \alpha(k).$$

由于 Lipschitz 函数的性质和 f 的有界性及 Jensen 不等式, 有

$$|\text{cov}\left(f\left(\frac{S_k}{\sigma_k}\right), f\left(\frac{S_l}{\sigma_l}\right) - f\left(\frac{S_l - S_{2k}}{\sigma_l}\right)\right)| \ll E\left(\frac{|S_{2k}|}{\sigma_l}\right).$$

当 $h(k)$ 是缓变函数, 由缓变函数的性质, $\forall \varepsilon > 0$, $k^\varepsilon h(k)$ 是拟单调上升的, 即当 $l > 2k$, 有 $(2k)^\varepsilon h(2k) \leq l^\varepsilon h(l), h(2k) \leq (1/2k)^\varepsilon h(l)$ 。

又根据 σ_n 的表达式, 所以 $\forall 0 < \varepsilon < 1/2$, 有

$$\begin{aligned} E\left(\frac{|S_{2k}|}{\sigma_l}\right) &\leq \frac{(E(S_{2k})^2)^{1/2}}{\sigma_l} = \frac{(\sigma_{2k}^2)^{1/2}}{(\sigma_l^2)^{1/2}} \\ &= \left(\frac{2k \cdot h(2k)}{l \cdot h(l)}\right)^{1/2} \leq \left(\frac{2k}{l}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{(l/2k)^\varepsilon h(l)}{h(l)}\right)^{1/2} \\ &\ll \left(\frac{k}{l}\right)^{1/2-\varepsilon} = \left(\frac{k}{l}\right)^r, \quad 0 < r < 1/2. \end{aligned}$$

从而有

$$|E(\xi_k \xi_l)| \ll (k/l)^r + \alpha(k), \quad 0 < r < 1/2, \quad l > 2k.$$

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{k=1}^n d_k \xi_k\right)^2 &\ll \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} d_k d_l |E(\xi_k \xi_l)| \\ &= \sum_{1 \leq k \leq l \leq n, l/k \geq (\log D_n)^{2r}} d_k d_l |E(\xi_k \xi_l)| + \\ &\quad \sum_{1 \leq k \leq l \leq n, l/k < (\log D_n)^{2r}} d_k d_l |E(\xi_k \xi_l)| = T_{n,1} + T_{n,2} \end{aligned}$$

$$T_{n,1} \ll \sum_{1 \leq k \leq l \leq n, l/k \geq (\log D_n)^{2r}} d_k d_l \cdot \left(\frac{1}{(l/k)^r} + \alpha(k)\right)$$

$$\leq \sum_{k=1}^n d_k \sum_{l=1}^n d_l \cdot \frac{1}{((\log D_n)^{2r/r})^r} +$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \exp((\log k)^\alpha) \alpha(k) \sum_{l=1}^n d_l$$

$$\leq \frac{D_n^2}{(\log D_n)^2} + D_n \exp((\log n)^\alpha) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{(\log k)^{1+\delta}}$$

$$\ll \frac{D_n^2}{(\log D_n)^2} + D_n \exp((\log n)^\alpha) \cdot \frac{1}{(\log n)^\delta}.$$

因为 $d_l = \frac{1}{l} \exp((\log l)^\alpha) \sim \log \frac{l+1}{l} \exp((\log l)^\alpha)$, $\frac{1}{D_{n_k}} \left| \sum_{k=1}^{n_k} d_k \xi_k \right| \xrightarrow{a.s.} 0, k \rightarrow \infty$ 。

所以

$$T_{n,2} \ll \exp((\log n)^\alpha) \sum_{k=1}^n d_k \sum_{k \leq l < k(\log D_n)^{2\alpha}} (\log(l+1) - \log l) \\ \ll \exp((\log n)^\alpha) \cdot D_n \cdot \log \log D_n$$

由式(3)得 $\exp((\log n)^\alpha) \sim D_n (\log n)^{\alpha-1}$ 及 $\log D_n \sim \log \log n + (\log n)^\alpha$, 则 $\log D_n \sim (\log n)^\alpha, \exp((\log n)^\alpha) \sim D_n (\log n)^{\alpha-1} \sim D_n (\log D_n)^{(\alpha-1)/\alpha}$, 从而有

$$T_{n,1} \ll \frac{D_n^2}{(\log D_n)^2} + \frac{D_n^2}{(\log D_n)^{(1-\alpha)/\alpha + \delta/\alpha}}$$

$$T_{n,2} \ll (D_n)^2 (\log D_n)^{(\alpha-1)/\alpha} \cdot \log \log D_n$$

因此,当 $\alpha \in [0, 1/2)$ 时, $(1-\alpha)/\alpha > 1, \forall \varepsilon > 0$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|T_n| > \varepsilon) \ll \sum_{n=1}^{\infty} E T_n^2 \ll \frac{1}{D_n^2} \sum_{n=1}^{\infty} E \left(\sum_{k=1}^n d_k \xi_k \right)^2 \\ \ll \frac{1}{D_n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{D_n^2}{(\log D_n)^2} + \frac{D_n^2}{(\log D_n)^{(1-\alpha)/\alpha + \delta/\alpha}} + \frac{D_n^2 \log \log D_n}{(\log D_n)^{(1-\alpha)/\alpha}} \right) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(\log D_n)^2} + \frac{1}{(\log D_n)^{(1-\alpha)/\alpha + \delta/\alpha}} + \frac{\log \log D_n}{(\log D_n)^{(1-\alpha)/\alpha}} \right) \\ \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log D_n \cdot (\log \log D_n)^2}$$

下面用子序列法证明 $T_n \xrightarrow{a.s.} 0, n \rightarrow \infty$ 。先证明

$\forall a > 1$, 存在子列 $\{n_k\}$, 使得 $D_{n_k} \sim a^k, k \rightarrow \infty$ 。取 $n_k = \inf\{n, D_n \geq a^k\}$, 则 $D_{n_k} \geq a^k, D_{n_k-1} < a^k$ 。又根据 d_n, D_n 的表达式, 显然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n/D_n = 0$,

所以 $\frac{D_{n_k-1}}{D_{n_k}} = 1 - \frac{d_{n_k}}{D_{n_k}} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ 。

故 $1 \leq \frac{D_{n_k}}{a^k} = \frac{D_{n_k}}{D_{n_k-1}} \cdot \frac{D_{n_k-1}}{a^k} < \frac{D_{n_k}}{D_{n_k-1}} \rightarrow 1, k \rightarrow \infty$,

所以 $D_{n_k} \sim a^k, k \rightarrow \infty$ 。

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|T_{n_k}| > \varepsilon) \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log D_{n_k} \cdot (\log \log D_{n_k})^2} \\ \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^2} < \infty$$

由 Borel-Cantelli 引理知 $T_{n_k} \xrightarrow{a.s.} 0, n \rightarrow \infty$ 。即

$\forall n$ 存在 k , 使 $n_k \leq n < n_{k+1}$,

$$|T_n| = \frac{1}{D_n} \left| \sum_{k=1}^n d_k \xi_k \right| \leq \frac{1}{D_{n_k}} \left| \sum_{k=1}^{n_k} d_k \xi_k \right| +$$

$$\frac{1}{D_{n_k}} \left| \sum_{k=n_k+1}^{n_{k+1}} d_k \xi_k \right| \leq |T_{n_k}| + \frac{2C}{D_{n_k}} (D_{n_{k+1}} - D_{n_k}) \\ = |T_{n_k}| + 2C \left(\frac{D_{n_{k+1}}}{D_{n_k}} - 1 \right) \xrightarrow{a.s.} 2C(a-1), n \rightarrow \infty$$

令 $a \rightarrow 1$, 则有 $T_n \xrightarrow{a.s.} 0, n \rightarrow \infty$ 。因而式(1)成立。

最后证明式(2)成立。由前面的证明可知,

$$P(|T_n| > \varepsilon) \ll E T_n^2 \ll \frac{1}{D_n^2} E \left(\sum_{k=1}^n d_k \xi_k \right)^2 \\ \ll \frac{1}{(\log D_n)^2} + \frac{1}{(\log D_n)^{(1-\alpha)/\alpha + \delta/\alpha}} + \\ \frac{\log \log D_n}{(\log D_n)^{(1-\alpha)/\alpha}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

即 $T_n \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty$ 。

故式(2)成立。

参考文献:

- [1] Brosamler G A. An almost everywhere central limit theorem [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1988, 104: 561-574.
- [2] Schatte P. On strong versions of the central limit theorem [J]. Mathematische Nachrichten, 1988, 137: 249-256.
- [3] Lacey M T, Philipp W. A note on the almost sure central limit theorem [J]. Statistics and Probability Letters, 1990, 9: 201-205.
- [4] 付艳莉, 吴群英. LNQD 序列几乎处处中心极限定理 [J]. 桂林理工大学学报, 2010, 30 (4): 637-639.
- [5] Peligrad M, Shao Q M. A note on the almost sure central limit theorem for weakly dependent random variables [J]. Statist. Probab. Lett., 1995, 22 (2): 131-136.
- [6] 金敬森. 强混合序列部分和乘积的几乎处处中心极限定理 [J]. 浙江大学学报: 理学版, 2007, 34 (1): 24-27.
- [7] 陈守全, 林正炎. 随机变量序列函数的几乎处处中心极限定理 [J]. 数学物理学报, 2008, 28 (4): 747-756.
- [8] 陆传荣, 林正炎. 混合相依变量的极限理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.

An almost sure central limit theorem for strong mixing random sequences

FENG Feng-xiang

(School of Science, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: An almost sure central limit theorem is obtained for the strong mixing random sequences. A better result is obtained by using the technique of subsequence.

Key words: α -mixing random sequences; central limit theorem; almost sure central limit theorem