文章编号：1674－9057（2010）02－0246－04

地图投影设计中地球椭球基本元素的计算及应用

钟业勋[1,2]，胡宝清[1]，朱亚荣[2]

（1. 广西师范学院 a. 北部湾环境演变与资源利用教育部重点实验室；b. 资源与环境科学学院，南宁　530001；
2. 广西测绘局，南宁　530023）

摘　要：不同的坐标系使用不同的地球椭球参数。对不同的椭球同一点的地球椭球基本元素 M、N、r、R、S、L、F、U 有不同的数值，地图投影设计中的投影常数，坐标和变形的计算等，都需要获得上述基本元素中的部分元素。给出了一个用 CASIO *fx*－4800P 计算器计 算 M、N、r、R、S、L、F、U 的程序，以及 IUGG75 椭球和 GRS80 椭球等的椭球参数，因此可以对不同的地球椭球快速计算上述所有元素，从而为地图投影的设计提供了方便。

关键词：地图投影；地球椭球基本元素；公式；计算程序；应用

中图分类号：P282.1　　　　**文献标志码：**A

地图投影是地图的数学基础。编制一幅一个省（区）、一个国家或一个大陆的地图，往往需要根据制图区域的形状、地理位置、专题、变形分布等要求，单独设计一个合适的地图投影。当地图比例尺较小时，需要考虑地球的扁率，从而要根据地球椭球的主要参数计算出与纬度相关的子午线曲率半径 M，卯酉圈曲率半径 N，纬线半径 r，某点的平均曲率半径 R，等角表象函数 U，由赤道至纬度 φ 的子午线弧长 s，经差 1° 的纬线弧长 L，经差 1 rad 从赤道至某一纬度 φ 的椭球面梯形面积 F 等。对于等角、等积或任意等不同性质的投影，需要的基本数据有所不同。本文将地图投影中需要的基本要素的公式集成于一个 CASIO *fx*－4800P 程序，使之能一次性快速计算。

1　地球椭球参数

1.1　地球椭球

大地水准面是假定海水处于“完全”静止状态，把海水面延伸到大陆之下形成包围整个地球的连续曲面。大地水准面所包围的球体，称为大地体。由于大地水准面上任何一点的铅垂线都与大地水准面正交，而铅垂线的方向又受地球内部质量分布不均匀的影响，致使大地水准面在全球范围内仍有 100 m 左右的起伏[1-2]。由于大地水准面的形状复杂性，不能作为直接依据的投影面。为了便于测绘成果的计算，选择一个大小和形状同它极为接近的旋转椭球面来代替它，即以椭球的短轴为旋转轴旋转而成的椭球面，称地球椭球面。

1.2　地球椭球参数

地球椭球的长半径 a（赤道半径）、短半径 b（极轴半径）、扁率 f，第一偏心率 e，第二偏心率 e' 称为椭球元素或椭球参数。

扁率　$$f=\frac{a-b}{a};\tag{1}$$

第一偏心率　$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2};\tag{2}$$

第二偏心率　$$e^2=\frac{a^2-b^2}{b^2}。\tag{3}$$

收稿日期：2009－03－24

基金项目：国家自然科学基金项目（40871250，40661005）；广西自然科学基金重点项目（0832021Z）；教育部优秀人才支持计划专项（NCET－06－0760）

作者简介：钟业勋（1939—），男，教授，研究方向：地图学理论，gxzyxun@163.com。

引文格式：钟业勋，胡宝清，朱亚荣．地图投影设计中地球椭球基本元素的计算及应用［J］．桂林理工大学学报，2010，30（2）：246－249.

决定地球椭球的大小，只要知道其中两个元素就够了，但其中必须有一个长度（a 或 b）。

2　地球椭球上基本元素的计算公式

2.1　子午圈曲率半径

包含地轴的平面与椭球面的交线称为子午圈或子午线或经线。过子午线某点的子午线曲率半径 M 为

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}。\tag{4}$$

2.2　卯酉圈曲率半径

过子午圈上某点，可作垂直于子午圈的截面，称为卯酉圈截面，卯酉圈截面与地球椭球面的交线称为卯酉圈，其半径 N 为

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}。\tag{5}$$

2.3　纬圈曲率半径

垂直于地轴的平面与地球椭球面的交线称为纬圈或纬线，其曲率半径 r 为

$$r = N\cos\varphi。\tag{6}$$

2.4　平均曲率半径

过地球面上的任一点，可作唯一的子午圈和卯酉圈，其曲率半径的几何中数即为该点的平均曲率半径

$$R = \sqrt{MN}。\tag{7}$$

2.5　由赤道至纬度 φ 的子午线弧长

$$s = A\varphi + B\sin 2\varphi + C\sin 4\varphi + D\sin 6\varphi + E\sin 8\varphi。\tag{8}$$

2.6　经差 1°的纬线弧长

$$L = \pi N\cos\varphi \div 180。\tag{9}$$

2.7　经差 1 rad 由赤道至纬度 φ 的椭球面梯形面积

$$F = \frac{a^2(1-e^2)}{4e}\left[\frac{2e\sin\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} + \ln\frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi}\right]。\tag{10}$$

2.8　等角表象函数

$$U = \frac{\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)}{\tan^e\left(45° + \frac{\psi}{2}\right)}。\tag{11}$$

式中 $\psi = \sin^{-1}(e\sin\varphi)$。

式(4) ~ (11) 中的 φ 为纬度，以“°”为单位；式(4)、(5) 中的 a 为椭球长半径，以“m”为单位；式(10) 中的 a 为椭球长半径，以“km”为单位，F 以“km²”为单位；式(4)、(5)、(10)、(11) 中的 e 为第一偏心率。

3　CASIO fx − 4800P 计算器计算地球椭球基本元素的程序

公式与程序中对应的符号见表 1。

3.1　计算程序

在文件[MNRSLFU]下输入程序(以 IUGG75 椭球为例)

Deg：Fix7：Lbl 1：{A}：E = 0.081 819 221sinA：I = 1 − E^2：M = 6 335 442.276 ÷ I^1.5 ◢

Lbl2：N = 6 378 140 ÷ √ I ◢

Lbl3：R = NcosA ◢

Lbl4：K = √(MN ◢

Lbl5：S = 111 133.004 6A − 16 038.528sin2A + 16.833sin4A − 0.022sin6A + 0.00003sin8A ◢

Lbl6：L = πNcosA ÷ 180 ◢

Lbl7：F = 123 468 352.9(2E ÷ I + ln((1 + E) ÷ (1 − E) ◢

Lbl8：U = tan(45° + A ÷ 2) ÷ (tan(45° + sin⁻¹E ÷ 2) ^0.081 819 221 ◢

Lbl9：Goto1◺ ◢ [EXIT] [EXIT]

3.2　计算

在 A? 提示下输入一个纬度 A 值，再按 [EXE] 键

表 1　公式与程序中对应的符号

Table 1　Corresponding symbol of formula and order

公式序号		(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
名称	变量	子午圈曲率半径	卯酉圈曲率半径	纬圈半径	平均曲率半径	子午线弧长	经差 1°的纬线长	球面梯形面积	等角表象函数
公式	φ	M	N	r	R	s	L	F	U
程序	A	M	N	R	K	S	L	F	U

时，即出现 M 值，以后每按一次 $\boxed{\text{EXE}}$ 键便依次显示 N，R，…，U 各值。当 U 值显示后又回归 A?，又可重复前面的操作，算出新输入的 A 所对应的各值[3]。

对于1954年北京坐标系采用的克拉索夫斯基椭球，以前是由文献［4］查表获得。

本程序应用于不同坐标系所采用的不同椭球的参数和系数见表2。

表2　计算程序中3个不同椭球的参数与系数

Table 2　Parameter and coefficient of three different ellipsoid in computational order

参数或系数		1954年北京坐标系(克拉索夫斯基椭球)	1980西安坐标系(IUGG75椭球)	2000国家大地坐标系(GRS80椭球)
长半径 a/m		6 378 245	6 378 140	6 378 137
短半径 b/m		6 356 863	6 356 755	6 356 752
扁率 f		1∶298.3	1∶298.26	1∶298.257 222 101
第一偏心率 e		0.081 813 334	0.081 819 221	0.081 819 191
第二偏心率 e'		0.082 088 522	0.082 094 469	0.082 094 438
$a(1-e^2)$		6 335 552.717	6 335 442.276	6 335 439.327
$a^2(1-e^2)/4e$		123 481 422.5	123 468 352.9	123 468 282.6
由赤道至纬度 φ 的子午线弧长 s	A/m	111 134.861	111 133.004 6	111 132.952 5
	B/m	−16 036.48	−16 038.528	−16 038.506 8
	C/m	16.828	16.833	16.8 326
	D/m	−0.022	−0.022	−0.022
	E/m	0.000 03	0.000 03	0.000 03

4　应用实例

例1　设计某制图区域的等角切圆锥投影

解：正轴等角切圆锥投影即单标准纬线等角圆锥投影，切纬线 φ_0 上无长度变形，φ_0 为已知条件：

① 计算投影常数

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \sin\varphi_0, \\ K &= \frac{r_0 U_0^{\alpha}}{\alpha}。\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

先按本文给出的程序求得 φ_0 上的纬圈半径 r_0 和等角表象函数 U_0，代入式(12)求投影常数 α，K。

② 计算纬线投影半径 ρ 和经线与中央经线夹角 δ，

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{K}{U^{\alpha}}, \\ \delta &= \alpha\lambda。\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

ρ 为 φ 的函数而 δ 为 λ 的函数，按设计的经纬线间隔可获得每个坐标点的 φ、λ，从而求取 ρ、δ。

③ 计算坐标

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho_s - \rho\cos\delta, \\ y &= \rho\sin\delta。\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

取式(13)获得的每一点的 ρ、δ 值，可求每一点坐标。式(14)中 ρ_s 为最低纬线投影半径。

④ 计算变形

等角投影中每点的纬线长度比 n 和经线长度比 m 相等，无角度变形但有面积变形，面积比 P 与1之差为面积变形，各点的 m、n、p 为

$$\left.\begin{aligned} m &= n = \frac{\alpha\rho}{r}, \\ P &= mn = m^2 = n^2, \\ \omega &= 0。\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

可见，m、n 是 r、ρ 的函数，从而需以 φ 为引数求取相应的 ρ、r。

例2　设计某制图区域的正轴双标准纬线等面积圆锥投影

解：正轴双标准纬线等积圆锥投影在标准纬线 φ_1、φ_2 上无长度变形。

① 求投影常数

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{r_1^2 - r_2^2}{2(F_2 - F_1)}, \\ C &= \frac{r_1^2 F_2 - r_2^2 F_1}{r_1^2 - r_2^2}。\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

按本文程序求取 φ_1、φ_2 所对应的纬圈半径 r_1、r_2，经差1 rad从赤道至 φ_1、φ_2 的球面梯形面积 F_1 和 F_2，即可求投影常数 α、C。

② 求纬线投影半径 ρ 和经线与中央经线的夹角 δ

$$\rho^2 = \frac{2}{\alpha}(C - F),\ \delta = \alpha\lambda。 \tag{17}$$

ρ 为 F 的函数，需应用本文程序求 F；δ 是 λ 的函数，按设计的经纬线间隔取各点的 φ；λ 值为引数，可求相应的 ρ、δ 值，从而可按式(14)求各点的坐标。等角投影与等积投影坐标公式的形式一样，但求取 ρ 的公式不同。

③ 计算变形

$$m = \frac{\alpha\rho}{r},\ n = \frac{1}{m}。 \tag{18}$$

因 m 为 r、ρ 的函数，n 又为 m 的函数，故都需应用本程序求 r。

5　结束语

数学在地图学中的理论阐释和实践计算中有广泛的应用[5]，如基本地貌形态数学定义体系的构建[6-7]、地图网络的数学表述[8]等均属理论阐释的范畴，本文侧重于地图投影设计中地球椭球基本元素的计算问题。基于地图投影设计中必须获取地球椭球面多种元素的需要，给出了对子午线曲率半径 M，卯酉圈曲率半径 N，纬圈半径 r 等地球椭球基本元素进行一次性计算求解的 CASIO *fx* - 4800P 计算器计算程序，给出了克拉索夫斯基椭球、IUGG75 椭球和 GRS80 椭球的相应参数，从而使本程序可以应用于 1954 年北京坐标系、1980 西安坐标系和 2000 国家大地坐标系的不同系统的投影设计。通过常用公式集成以计算器快速计算，对于解决地图投影设计中的数据准备问题有广泛的应用价值。

参考文献：

［1］胡毓钜，龚剑文．地图投影［M］．2 版．北京：测绘出版社，1992：10.

［2］宁津生，陈军，晁定波．数字地球与测绘［M］．北京：清华大学出版社，2001：59.

［3］钟业勋．数理地图学［M］．北京：测绘出版社，2007：48 - 50.

［4］方炳炎．地图投影计算用表［M］．北京：测绘出版社，1979：5 - 60.

［5］钟业勋，胡宝清，乔俊军．数学在地图学中的应用［J］．桂林理工大学学报，2010，30（1）：93 - 98.

［6］钟业勋，魏文展，李占元．基本地貌形态数学定义的研究［J］．测绘科学，2002，27（3）：16 - 18..

［7］钟业勋，胡宝清，朱根雄．基本地貌形态数学定义体系研究［J］．桂林工学院学报，2009，29（4）：481 - 484.

［8］钟业勋，童新华．地图网络数学定义的研究［J］．海洋测绘，2009，29（3）：19 - 20.

Application and Computation for Basic Elements of Earth Ellipsoid in Projection

ZHONG Ye-xun[1,2], HU Bao-qing[1], ZHU Ya-rong[2]

(1. a. *Key Laboratory of Beibu Gulf Environmental Evolution and Resources Utilization*, *Ministry of Education*; b. *School of Resources and Environment Science*, *Guangxi Teachers Education University*, *Nanning* 530001, *China*; 2. *Guangxi Regional Bureau of Surveying and Mapping*, *Nanning* 530023, *China*)

Abstract: Different coordinate system uses different earth ellipsoid parameter. Earth ellipsoid basic elements M, N, r, R, S, L, F, U of the same point have different number value for different ellipsoid. Some basic elements are needed in map projection for projection constant, coordinate and distortion. This paper introduces a computational order with CASIO *fx* - 4800P computer for computation M, N, r, R, S, L, F, U, and the ellipsoid parameter of IUGG75 ellipsoid and GRS80 ellipsoid. All elements for different earth ellipsoid can be computed quickly convenient for the design of map projection.

Key words: projection; basic element of earth ellipsoid; formula; computational order; application