文章编号：1674－9057（2010）02－0316－05

一个离散混沌系统的动力学性质

李 勇，贾 贞，王 俊，汪 贺

（桂林理工大学 理学院，广西 桂林 541004）

摘 要：讨论了立方混沌系统在不同参数下的动力学性质，并进行了严格的理论证明。分别用代数和数值的方法分析了该系统由倍周期分岔通向混沌的过程，同时借助 Lyapunov 指数证明了混沌的存在性，并得到其临界值 $\lambda_\infty = 2.348\ 917\ 5\cdots$。

关键词：动力学；Lyapunov 指数；分岔；混沌

中图分类号：O415.5 **文献标志码**：A

本文探究一个与虫口模型类似的一维离散动力系统——立方混沌[1]的动力学性质，从理论方面论证其混沌的产生与存在性，研究了其不动点及周期轨道的稳定性，并用数值方法研究了其倍周期分岔通向混沌的过程。与虫口模型等典型一维离散混沌系统相比，立方混沌由于三次项的出现有着更复杂的动力学性质。

1 立方混沌模型及预备知识

考虑一维离散系统的差分方程：

$$x_{n+1} = \lambda x_n - x_n^3, \tag{1}$$

其中 λ 为常数。由于方程含有立方项，并且由此所产生的离散动力系统蕴含有混沌，称此模型为立方混沌[1]。其迭代函数为 $f_\lambda(x) = \lambda x - x^3$。显然它是一个奇函数，定义域和值域都为 $\mathbf{R}$。$f_\lambda(x)$ 的导数为 $f_\lambda'(x) = \lambda - 3x^2$。

为了分析立方混沌的动力学性质，下面介绍一些相关的预备知识[1-7]。

定义 1 如果 x^* 满足 $f(x^*) = x^*$，那么称 x^* 为 $f(x)$ 的不动点。如果存在 $\varepsilon > 0$，当 $|x - x^*| < \varepsilon$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = x^*$，则称 x^* 是局部稳定的不动点，否则就称 x^* 是不稳定的不动点。这里 $f^n(x)$ 为点 x 通过迭代函数 $f(x)$ 经过 n 次迭代的结果。

定义 2 对区间 (a,b) 上的函数 $f(x)$ 的不动点 x^*，如果任意取定 $x \in (a,b)$ 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = x^*$，那么称不动点 x^* 在 (a,b) 上是稳定的。

定义 3 设 $f(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$，$x^*$ 是 $f(x)$ 的不动点，若 $|f'(x^*)| < 1$，则称 x^* 为 $f(x)$ 的吸引不动点；若 $|f'(x^*)| > 1$，则称 x^* 是 $f(x)$ 的排斥不动点；当 $|f'(x^*)| = 1$ 时，称 x^* 是超稳定的不动点。

显然，吸引不动点是局部稳定的，这时 x^* 附近的点随着迭代次数的增加将越来越接近于 x^*；排斥不动点是不稳定的，这时 x^* 附近的点随着迭代次数的增加将越来越远离 x^*；而超稳定不动点 x^* 可能是稳定的，也可能是不稳定的，还可能是半稳定的，即 x^* 一侧的点在迭代下趋于 x^*，而另一侧的点在迭代下远离 x^*，其进一步判断见以下引理。

引理 1[3] 设 x^* 为 $f(x)$ 的不动点，且 $f'(x^*) = 1$，则

（1）若 $f''(x^*) \neq 0$，则 $x_{n+1} = f(x_n)$ 是被不动点吸引（或排斥）取决于 $x_n > x^*$（或 $<$）；

（2）若 $f''(x^*) = 0$，则当 $f'''(x^*) < 0$ 时该不动点是吸引的；当 $f'''(x^*) > 0$ 时该不动点是排斥的。

引理 2[3] 当 $f'(x^*,\lambda) = -1$ 时，系统轨迹发生分岔。

收稿日期：2009－04－16

基金项目：广西自然科学基金项目（桂科基 0991244）；广西教育厅科研项目（200807MS043）

作者简介：李 勇（1985—），男，硕士研究生，研究方向：混沌控制与同步，gxbyl@163.com。

通讯作者：贾 贞，教授，jjzzz0@163.com。

引文格式：李勇，贾贞，王俊，等. 一个离散混沌系统的动力学性质［J］. 桂林理工大学学报，2010，30（2）：316－320.

定义 4　设 x^* 是函数 $f(x)$ 的 n 周期点，若 $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^n(x^*)\right|<1$，则称 x^* 为 $f(x)$ 的吸引周期点，若 $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^n(x^*)\right|>1$，则称 x^* 为 $f(x)$ 的排斥周期点。相应地称 $\{x^*, f(x^*),\cdots, f^{n-1}(x^*)\}$ 为稳定（不稳定）周期轨。

定义 5　在动力系统的多次迭代中平均每次迭代所引起的指数分离中的指数称为 Lyapunov 指数。

对于一维离散动力系统 $x_{n+1}=F(x_n)$，其 Lyapunov 指数 $\sigma=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}\ln\left|\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_i}$。

如果 $\sigma<0$，表明相邻点终归要靠拢合并成一点，这对应于稳定的不动点或周期点；如果 $\sigma>0$，则意味着运动轨道的局部不稳定，相邻点的轨道最终按指数方式分离，如果轨道有整体的稳定因素（例如有捕捉区域，耗散等），则在此作用下反复折叠，形成混沌吸引子。因此，$\sigma>0$ 可以作为混沌行为的判据。σ 由负变正表明运动向混沌机制的转变，$\sigma=0$ 对应分岔点。

2　立方混沌的不动点及其动力学性质

由不动点的定义，令 $f_\lambda(x^*)=x^*$，可得 $x^*=0$ 或 $x^*=\pm\sqrt{\lambda-1}$。所以，当 $\lambda\leqslant 1$ 时，系统(1) 有唯一的不动点 $x^*=0$；当 $\lambda>1$ 时，系统(1) 有 3 个不动点，即 $x^*=0$ 和 $x^*=\pm\sqrt{\lambda-1}$。容易证明，上述不动点具有如下性质：

性质 1　$x^*=0$ 时，$f'(x^*)=\lambda$，当 $\lambda\in(-1,1)$ 时，$|f'(x^*)|<1$，$x^*=0$ 为吸引不动点，此时系统(1) 为局部稳定的；$\lambda\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，$|f'(x^*)|>1$，$x^*=0$ 为排斥不动点，此时系统(1) 为不稳定的。

性质 2　$x^*=\pm\sqrt{\lambda-1}$ 时，$f'(x^*)=3-2\lambda$，当 $\lambda\in(1,2)$ 时，$|f'(x^*)|<1$，$x^*=\pm\sqrt{\lambda-1}$ 为吸引不动点，此时系统(1) 为局部稳定的；$\lambda\in(2,+\infty)$ 时，$|f'(x^*)|>1$，$x^*=\pm\sqrt{\lambda-1}$ 为排斥不动点，此时系统(1) 为不稳定的。

下面详细分析当参数 λ 在不同区间上取值时立方混沌在不动点及其附近的动力学性质。

命题 1　$\lambda\in(-\infty,-1]$ 时，$x^*=0$ 是唯一的不动点，且为排斥不动点，其排斥域 $w^{\mathrm{u}}(0)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，系统(1) 的任何非零初始值的轨道都趋于 ∞。

证明： $\lambda\in(-\infty,-1)$ 时，$x^*=0$ 为排斥的不动点（性质 1）。现考虑当 $\lambda\in(-\infty,-1]$ 时，$x_{n+1}=\lambda x_n-x_n^3$ 在 $x_0\neq 0$ 时的向前轨道。因为 $x_0\neq 0$ 且 $\lambda\leqslant -1$，故 $x_n\neq 0$。令 $|x_n|=y_n$，$-\lambda=a$，由 $|x_{n+1}|=|x_n||\lambda-x_n^2|$ 有 $y_{n+1}=y_n(y_n^2+a)=y_n^3+ay_n$。由于 $y_n>0$，且 $a\geqslant 1$，所以 $y_{n+1}-y_n=y_n^3+(a-1)y_n>0$，即 $y_{n+1}>y_n$，$\{y_n\}$ 是单调递增的。

下面证明当 $n\to\infty$ 时 $y_n\to+\infty$。用反证法，假设 $\{y_n\}$ 有上界，那么 $\{y_n\}$ 必有极限，设为 b。由 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_{n+1}=b$，有 $b(b^2+a-1)=0$。因为 $y_n>0$，故 $b\neq 0$，而 $1-a<0$，所以 $b^2+a-1=0$ 无解。从而实数 b 不存在，故 $\{y_n\}$ 无上界，当 $n\to+\infty$ 时 $y_n\to+\infty$，从而 $x_n\to\infty$。所以 $\lambda\in(-\infty,-1]$ 时，方程(1) 的任何非零初始值的轨道都趋于 ∞，且 $w^{\mathrm{u}}(0)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$。

命题 2　$\lambda\in(-1,1)$ 时，$x^*=0$ 是唯一的不动点，且为吸引不动点，其吸引域 $w^{\mathrm{s}}(0)=(-\sqrt{\lambda+1},\sqrt{\lambda+1})$。

证明： 当 $\lambda\in(-1,1)$ 时，$x^*=0$ 为吸引不动点（性质 1）。现考虑 $x_{n+1}=\lambda x_n-x_n^3$ 在 $x_0\neq 0$ 时的向前轨道。为了证明方程(1) 在吸引域上 $(-\sqrt{\lambda+1},\sqrt{\lambda+1})$ 的任何初始值 $x_0\neq 0$ 的轨道都趋于 0，先证明 $\{|x_n|\}$ 是单调递减的。考虑 $\frac{|x_1|}{|x_0|}=|\lambda-x_0^2|$，当 $|\lambda-x_0^2|<1$ 时有 $|x_1|<|x_0|$，此时 $-\sqrt{\lambda+1}<x_0<\sqrt{\lambda+1}$ 且 $|x_1|<\sqrt{\lambda+1}$，$x_1\neq 0$。同理由 $|\lambda-x_1^2|<1$ 有 $|x_2|<|x_1|$。依此类推有 $|x_{n+1}|<|x_n|$。由于 $\{|x_n|\}$ 单调递减，且有下界，故当 $n\to+\infty$ 时 $\{|x_n|\}$ 极限存在，设为 b，则有 $b=\lambda b-b^3$，即 $b^2(b^2-\lambda+1)=0$。显然 $b^2\neq\lambda-1$，故有 $b=0$，从而当 $n\to+\infty$ 时 $x_n\to 0$，证毕。

由引理 2 可知，系统(1) 在 $\lambda=-1$ 出现了分岔。事实上，当 $\lambda=-1$ 时，$x^*=0$ 由排斥不动点变为吸引不动点，这种分岔叫做交换分岔[1]。

命题 3　$\lambda=1$ 时，$x^*=0$ 是唯一的不动点，且为吸引不动点，其吸引域 $w^{\mathrm{s}}(0)=(-\sqrt{2},\sqrt{2})$。

证明： 当 $\lambda=1$ 时，在 $x^*=0$ 处有 $f'(0)=1$。又 $f''(0)=0$，$f'''(0)=-6<1$，由引理 1 可知，$x^*=0$ 是吸引不动点。

当$x_0 \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$且$x_0 \neq 0, \pm 1$时，考虑$|x_1| = |x_0||1 - x_0^2|$。因为$x_0^2 < 2$且$x_0^2 \neq 0,1$，即$0 < |1 - x_0^2| < 1$，故$|x_1| < |x_0|$，且$0 < |x_1| < \sqrt{2}$，同理，当$x_1^2 \neq 0$时有$|x_2| < |x_1|$，依此类推，可知$\{|x_n|\}$是单调递减的且有下界，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$（见命题2的证明）。当$x_n = 0, \pm 1$时，$x_{n+1} = 0 (n = 0, 1, 2\cdots)$，故$x_0 \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，从而$w^s(0) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$。

当$x_0 \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$时，$1 - x_0^2 < -1$，由$|x_1| = |x_0||1 - x_0^2|$，有$\sqrt{2} < |x_0| < |x_1|$。同理$|x_1| < |x_2|$，运用数学归纳法可得，当$x_0 \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$时，$\{|x_n|\}$是单调递增的。由于$|x_n| > \sqrt{2}$，从而当$n \to +\infty$时，$x_n$远离不动点0。又当$x_0 = \pm\sqrt{2}$时，$x_n$的取值为$\pm\sqrt{2}$交替出现，即始于区间$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$以外的点的轨道不再被吸引了。

命题4 $\lambda \in (1,2)$时，系统(1)有3个不动点。$x^* = 0$为排斥不动点，其排斥域$w^u(0) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$；$x^* = \pm\sqrt{\lambda - 1}$为吸引不动点，$x^* = \sqrt{\lambda - 1}$的吸引域$w^s(x^*) = [\sqrt{\lambda - 1}, \sqrt{\lambda + 1})$；$x^* = -\sqrt{\lambda - 1}$的吸引域$w^s(x^*) = (-\sqrt{\lambda + 1}, \sqrt{\lambda - 1}]$。

此命题的证明与前面3个命题类似，在此不再赘述。

从上述分析可见，系统(1)在$\lambda = 1$时出现了分岔，不动点由之前的1个变为3个，而且不动点0由吸引不动点变为排斥不动点，这种分岔叫做跨临界分岔[4]，即$\lambda = 1$为系统(1)的跨临界分岔点。

3 立方混沌的分岔与混沌分析

当参数值λ由2过渡到3时，系统产生了分岔，并通过倍周期分岔产生了混沌。下面从理论分析和数值仿真两方面来加以研究。

前面已经了解$\lambda < 2$时所有不动点的性质，而$\lambda > 2$时，所有的不动点都失去了稳定性，变成了排斥不动点。为了看清$\lambda = 2$到底发生了什么事情，先作一个实值计算。在**R**上取任意非不动点作为初值，让计算机将此迭代，丢弃前400次的迭代数据，把后面100个迭代值打印在对应λ值的铅直轴上，图1是$x_0 = 0.5$时的迭代图。可以看到：$\lambda = 2$时，单线开始一分为二，这表明出现了2-周期点。随后出现4-周期点、8-周期点等，出现倍周期分岔，并由倍周期分岔通向了混沌，称$\lambda = 2$是倍周期分岔点[2-7]。倍周期分岔通向混沌过程的局部详细示意可见图2。

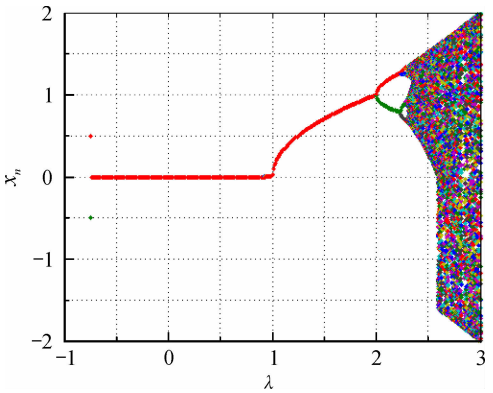


图1 倍周期分岔通向混沌

Fig. 1 Period doubling bifurcation leading to chaos

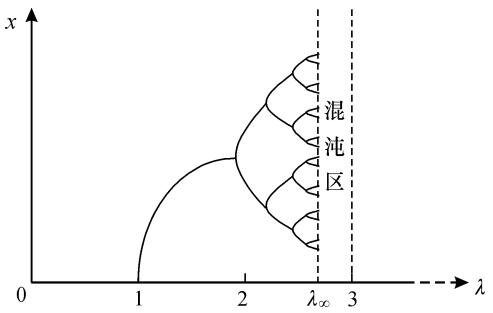


图2 周期倍化分岔通向混沌示意图

Fig. 2 Diagram of the period doubling bifurcation leading to chaos

下面利用计算机作出$y = f^2(x)$与$y = x$的图像，曲线$y = f^2(x)$与直线$y = x$的交点即为2-周期点。图3分别画出了参数$\lambda \in (1,2)$，$\lambda = 2$，$\lambda \in (2, +\infty)$这3个区间上的图像。

当$1 < \lambda \leqslant 2$时，除了3个不动点(1-周期点)外，还有2个2-周期点；当$\lambda = 2.2$时，出现了4个新的2-周期点。下面用代数的方法进一步求出这些2-周期点。

由$f^2(x) = \lambda(\lambda x - x^3) - (\lambda x - x^3)^3 = \lambda^2 x - \lambda x^3 - \lambda^3 x^3 + 3\lambda^2 x^5 - 3\lambda x^7 + x^9$，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^2(x) = \lambda^2 - 3\lambda x^2 - 3\lambda^3 x^2 + 15\lambda^2 x^4 - 21\lambda x^6 + 9x^8。 \quad (2)$$

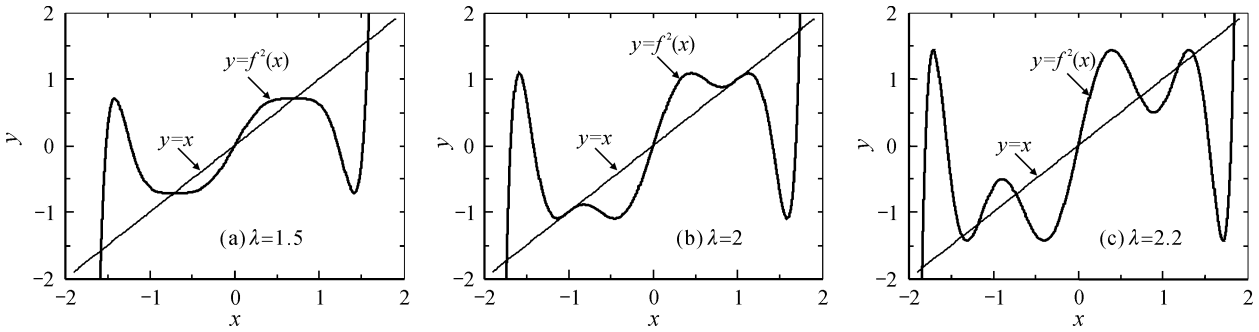


图 3　二周期点示意图

Fig. 3　Doubling period point diagram

将不动点 $x^* = \pm\sqrt{\lambda - 1}$ 代入式(2),则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x^*) = 4\lambda^2 - 12\lambda + 9 = (2\lambda - 3)^2。$$

当 $\lambda = 2$ 时,$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x^*) = 1$,即 $y = f^2(x)$ 与 $y = x$ 在 $x = x^*$ 处相切(图 3b)。

由 $f^2(x) = x$ 可得:$\lambda^2 x - \lambda x^3 - \lambda^3 x^3 + 3\lambda^2 x^5 - 3\lambda x^7 + x^9 = x$,消去 $x(x - \sqrt{\lambda - 1})(x + \sqrt{\lambda - 1})$ 因子,等价于消去不动点,可得

$$x(x - \sqrt{\lambda - 1})(x + \sqrt{\lambda - 1})g(x) = \lambda^2 x - \lambda x^3 - \lambda^3 x^3 + 3\lambda^2 x^5 - 3\lambda x^7 + x^9 - x。$$

再由待定系数法来求 $g(x)$,令 $g(x) = x^6 + ax^4 + bx^2 + c$,再令 $-\lambda + 1 = d$,则

$$x(x^2 + d)(x^6 + ax^4 + bx^2 + c) = \lambda^2 x - \lambda x^3 - \lambda^3 x^3 + 3\lambda^2 x^5 - 3\lambda x^7 + x^9 - x。$$

可得
$$\begin{cases} a + d = -3\lambda, \\ ad + b = 3\lambda^2, \\ bd + c = -\lambda - \lambda^3, \\ cd = \lambda^2 - 1。 \end{cases}$$

求得
$$\begin{cases} a = -2\lambda - 1, \\ b = \lambda^2 + \lambda + 1, \\ c = -\lambda - 1。 \end{cases}$$

故有

$g(x) = x^6 + (-2\lambda - 1)x^4 + (\lambda^2 + \lambda + 1)x^2 + (-\lambda - 1)$。

分析可得 $x = \pm\sqrt{\lambda + 1}$ 是 $g(x)$ 的根,故令 $g(x) = (x^2 - (\lambda + 1)) \cdot h(x)$,再用一次待定系数法,可得 $h(x) = x^4 - \lambda x^2 + 1$,则 $g(x) = (x^2 - (\lambda + 1))(x^4 - \lambda x^2 + 1)$,求解此式得到 2- 周期点

$$x^*_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda + 1},\ x^*_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}},\ x^*_{5,6} = \pm\sqrt{\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}}。$$

而 $\lambda = 2$ 时,$x^*_{3,4}$、$x^*_{5,6}$ 均与 1- 周期点 $x^* = \pm\sqrt{\lambda - 1}$ 重合,因此 $\lambda \leqslant 2$ 时系统只有 2 个 2- 周期点(不动点除外)$x^*_{1,2}$,在 $\lambda > 2$ 时产生了 4 个新的 2- 周期点 $x^*_{3,4}$ 和 $x^*_{5,6}$(图 2b、2c)。这样就得到了这 9 个 2- 周期点(包括 3 个不动点)具体的位置。下面再进一步讨论其稳定性。

由于 $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x^*_{1,2})\right| = (2\lambda + 3)^2$,根据定义 5 可知,$\lambda > 1$ 时,$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x^*_{1,2})\right| > 1$,即 $x^*_{1,2}$ 是排斥的周期点,也就是不稳定的。由 $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x^*_{3,4,5,6})\right| = |-2\lambda^2 + 9|$,可知 $2 < \lambda < \sqrt{5}$ 时,$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x^*_{3,4,5,6})\right| < 1$,从而 $x^*_{3,4,5,6}$ 是稳定的 2- 周期点,说明当 $\lambda > 2$ 时系统诞生了稳定的 2- 周期轨,进入 2- 周期窗口。当 $\lambda > \sqrt{5}$ 时,$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x^*_{3,4,5,6})\right| = |-2\lambda^2 + 9| > 1$,这 4 个 2- 周期点失稳,系统将产生新的稳定的 4- 周期点,发生第 2 次倍周期分岔,同时诞生一条稳定的 4- 周期轨,进入 4- 周期窗口,$\lambda = \sqrt{5}$ 是系统由 2- 周期到 4- 周期的分岔点。

借助施瓦茨导数(H. A. Schwarz)[7],利用倍周期分岔定理,容易证明在 $\lambda = 2$ 时发生了第 1 次倍周期分岔。随着 λ 的增大,将产生越来越多的倍周期分岔(图 2),大量的倍周期分岔出现在越来越窄的 λ 的间隔里,这种周期倍化的过程是没有限制的,不过相应的 λ 却有一个极限值 λ_∞(称为临界值),借助 Lyapunov 指数可以求得 $\lambda_\infty = 2.348\,917\,5\cdots$。注意到每次倍周期分岔得到的周期解是稳定

的,几乎所有的初值 x_0 的轨道将徘徊在这个稳定的周期解附近。但当 $\lambda \to \lambda_\infty$ 时,由于周期无穷长,实质上是非周期的,这样 $o^+(x_0)$ 已经没有什么规律可循,呈现出了混沌的特征,故 λ_∞ 实质上是有序到无序的分水岭,即当 λ 进入$(\lambda_\infty,3)$,便进入了混沌区。

从数值计算的结果来看,似乎当$\lambda > \lambda_\infty$ 时,2^n-周期轨不存在了,但由沙可夫斯基定理知,2^n- 周期轨始终是存在的,只不过它是一个排斥的周期轨,在计算机计算精度范围内看不见,在那里所见到的是吸引子。

以上详细分析了当 λ 值由 2 过渡到 3 时系统(1)的混沌产生过程。下面再借助 Lyapunov 指数来进一步确认这一过程。

图4是立方混沌的Lyapunov指数σ与参量值λ的关系图(Lyapunov指数谱)。图中取$\lambda \in [2,3]$,$x_0 = -0.02$, $n = 1\ 000$。可见,在进入混沌前,即 $\lambda < \lambda_\infty = 2.348\ 917\ 5\cdots$时,Lyapunov指数为负值,表明轨道收敛于某些周期不动点。当$\lambda > \lambda_\infty$时,总的

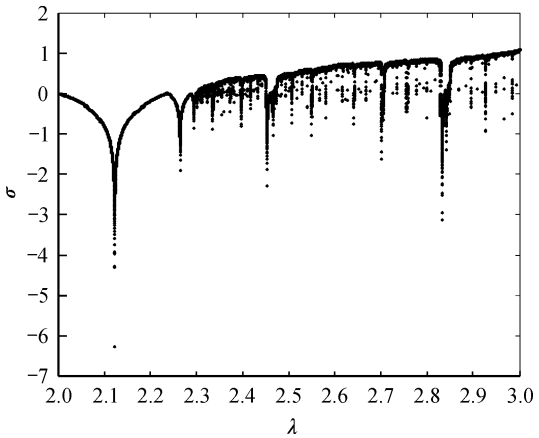


图 4 立方混沌的 Lyapunov 指数谱

Fig. 4 Lyapunov index spectra of cubic chaos

来讲 Lyapunov 指数为正,表示轨道发散,进入混沌区。但是,在混沌区内,乱中有序,存在分支、倒分支以及周期窗口,因此 Lyapunov 指数有时降到零,或降到负值。

4 结束语

本文分析了立方混沌在不同参数下的动力学性质,详细讨论并证明了不动点的稳定性,给出了相应的吸引域和排斥域。从理论分析和数值仿真两方面详细探讨了混沌的产生过程,并借助 Lyapunov 指数进一步证明了混沌的存在性。研究表明,当参数 λ 值由 2 过渡到 3 时,立方混沌系统通过倍周期分岔通向混沌,其临界值 $\lambda_\infty = 2.348\ 917\ 5\cdots$。对周期点的产生、周期点的个数以及倍周期分岔通向混沌的过程进行了详尽的描述。立方混沌与虫口模型[2]产生的混沌具有很大的相似性,这也从另一个方面说明混沌其实也是有一定的规律可循的。

参考文献:

[1]Hirsch M W, Smale S, Deveney R L. 微分方程、动力系统与混沌导论[M]. 2 版,甘少波,译. 北京:人民邮电出版社,2008.

[2]陈士华,陆君安. 混沌动力学初步[M]. 武汉:武汉水利电力大学出版社,1998:37 – 81.

[3]江成顺,刘霖雯,李晓聪. 一类动力系统的不动点和分岔[J]. 郑州大学学报:理学版,2004,36(1):12 – 15.

[4]褚利丽,张波,张薇琳. Boost 变换器分岔点的李雅谱诺夫指数研究[J]. 通信电源技术,2006,23(6):27 – 30.

[5]Tse C K, Chan W C Y. Chaos from a current programmed cuk converter[J]. Int. J. Circuit Theory Appl, 1995, 23: 217 – 225.

[6]Deane J H B, Hamill D C. Instability subharmonics and chaos in power electronic systems[J]. IEEE Trans. Power Electron., 1990, 5(3): 260 – 268.

[7]郝柏林. 从抛物线谈起——混沌动力学引论[M]. 上海:上海科技教育出版社,1993:32 – 76.

Dynamics Properties of a Discrete Chaotic System

LI Yong, JIA Zhen, WANG Jun, WANG He

(*College of Science, Guilin University of Technology, Guilin* 541004, *China*)

Abstract: The paper mainly discusses the dynamics properties of the cubic chaos system under different parameters, providing a rigorous theoretical reasoning. The process of the cubic chaos from period-doubling bifurcation to chaos is analyzed by algebraic and numerical methods respectively. Furthermore, the paper concludes the existence of chaos proved in the theory, and the critical value is obtained to be $\lambda_\infty = 2.348\ 917\ 5\cdots$ with the help of the Lyapunov exponent.

Key words: dynamics; Lyapunov exponent; bifurcation; chaos