第34卷 第2期
2014年5月

桂 林 理 工 大 学 学 报
Journal of Guilin University of Technology

Vol. 34 No. 2
May 2014

文章编号：1674－9057(2014)02－0401－05

doi:10.3969/j.issn.1674－9057.2014.02.033

期货市场尾部相关性的Copula度量

孙国华，苏红柳，唐国强

（桂林理工大学 理学院，广西 桂林 541006）

摘　要：通过选择恰当的Copula函数能够很好地度量金融数据的尾部相关性。选取Archimedean Copula函数族中Gumbel Copula和Clayton Copula分别对国际期货市场中黄金期货和白银期货收益率的尾部相关性进行度量，同时运用非参数估计法对Copula函数中的参数进行估计。结果表明，两种期货收益率的下尾相关性强于上尾相关性。

关键词：Copula；尾部相关；非参估计；*K-S*检验

中图分类号：F830　　　　**文献标志码**：A

随着经济全球化和金融自由化，金融市场的波动性不断加剧，金融工具所蕴涵的风险结构也越来越为复杂，许多金融资产具有非线性动态行为，特别是期权类金融工具之间，呈现出一定的非线性相关，这为刻画金融随机变量之间的相关性结构带来了困难。相关性研究在金融分析中非常重要，风险管理、投资组合的选择、资产定价等一系列金融问题都要涉及到相关性研究。刻画随机变量之间相关性结构的难点在于如何确定其联合分布函数，Copula方法为解决这一问题提供了新的思路。

自从Embrechts等把Copula这一技术引入到金融研究以来，已不断有文献用Copula来研究金融市场的相关性：首先在用Copula建立模型时，可由随机变量的边缘分布函数借助于Copula函数来研究随机变量之间的相关性结构，同时可将随机变量的边缘分布与相关结构分开研究，故可不受边缘分布选择的限制，还为求解联合分布函数提供了一条便捷的通道；其次由Copula可导出相关性指标，通常比常用的线性相关系数更加合乎人们的要求；并且其与常见的相关性度量相比较，Copula方法涵盖的随机变量相关性结构的信息更为充分[1]。Jondeau E等研究表明，金融资产收益表现出较强的尾部相关性，并且是非对称的，其下尾相关性大于上尾相关性[2]。柳会珍等利用广义Pareto模型研究了深市收益率分布的尾概率，并且指出存在着明显的尾部不对称现象[3]。本文针对期货市场当收益率发生极端事件（猛涨或猛跌）时，收益率的尾部相关性对其他收益率波动的影响程度。

1　基于Copula函数的尾部相关性

尾部相关性（tail dependence）可以较好地描述极端事件发生时变量间的相互作用，即随机变量X大幅度增加或者大幅度减少时，随机变量Y也发生大幅度增加或者大幅度减少的概率[4]。对于分布函数分别为F、G的随机变量X、Y，若X、Y的连接函数是C，则X、Y基于该Copula函数的上尾相关系数λ_U和下尾相关系数λ_L定义如下[5]：

$$\lambda_U = \lim_{t\to 1^-} P\{Y > G^{\leftarrow}(t) \mid X > F^{\leftarrow}(t)\} = \lim_{t\to 1^-} \frac{1-2t+C(t,t)}{1-t}, \tag{1}$$

$$\lambda_L = \lim_{t\to 0^+} P\{Y \leqslant G^{\leftarrow}(t) \mid X \leqslant F^{\leftarrow}(t)\} = \lim_{t\to 0^+} \frac{C(t,t)}{t}。\tag{2}$$

收稿日期：2013－03－06

基金项目：广西空间信息与测绘重点实验室项目（桂科能1103108－20）；桂林市科技局科研项目（20110120－5）

作者简介：孙国华（1987—），男，硕士研究生，研究方向：应用统计，296231428@qq.com。

通讯作者：唐国强，男，副教授，tanggq@glut.edu.cn。

引文格式：孙国华，苏红柳，唐国强．期货市场尾部相关性的Copula度量［J］．桂林理工大学学报，2014，34（2）：401－405．

其中：$\lambda_U,\lambda_L \in (0,1)$，当$\lambda_U(\lambda_L) > 0$时，称$X$、$Y$上（下）尾渐近相关；当$\lambda_U(\lambda_L) = 0$时，称$X$、$Y$上（下）尾渐近独立。$F^{\leftarrow}(t)$、$G^{\leftarrow}(t)$分别表示分布函数$F(\cdot)$、$G(\cdot)$的$t$分位数函数[6]。$\lambda_U(\lambda_L)$表示变量$X$、$Y$同时在上（下）尾部的相关系数，以下为另外两种尾部相关系数[7]：

$$\lambda_{UL} = \lim_{t\to 0^+} P\{Y \geqslant G^{\leftarrow}(t) \mid X \leqslant F^{\leftarrow}(t)\} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t - C(t,t)}{t};$$

$$\lambda_{LU} = \lim_{t\to 1^-} P\{Y < G^{\leftarrow}(t) \mid X > F^{\leftarrow}(t)\} = \lim_{t\to 1^-} \frac{t - C(t,t)}{1 - t}。$$

λ_{UL}表示X的下尾部与Y的上尾部之间的相关性，λ_{LU}表示X的上尾部与Y的下尾部之间的相关性。在金融分析中，很少考虑一种变量的上（下）尾部与另一种变量的下（上）尾部的相关性；因此，本文仅对上（下）尾相关系数$\lambda_U(\lambda_L)$进行分析研究。

2 Copula 函数的选取及参数估计

2.1 Copula 函数的定义及性质

Abe Sklar 于 1959 年最早提出 Copula 函数，但直至 20 世纪 90 年代，Copula 函数才得到金融学家的关注。作为研究随机变量相关结构的方法，Copula 具有其独特的性质，即多元分布函数可以通过单变量边缘分布函数以及多变量相关结构来刻画。

Sklar 定理[8]：设$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为n维分布函数，其边缘分布为$F_1(x_1),F_2(x_2),\cdots,F_n(x_n)$，则存在函数$C(\cdot)$，有唯一的 Copula 表达式：

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n) = C(F_1(x_1),F_2(x_2),\cdots,F_n(x_n))。$$

根据 Sklar 定理，就可以通过 Copula 函数$C(\cdot)$和边缘分布来构建多元联合分布。由于任意边缘分布函数$F_i(x_i)(i = 1,2,\cdots n)$值都可以看作是$I = [0,1]$上均匀分布随机变量$U_i$的取值，记$F$的逆函数为$F^{-1}$，即$F^{-1}(u) = \inf\{x \mid F(x) \geqslant u\}$，假设边缘分布$F_1(x_1),F_2(x_2),\cdots,F_n(x_n)$均连续，那么由 Sklar 定理可知，存在唯一的 Copula 函数$C(\cdot)$，使得

$$C(u_1,u_2,\cdots,u_2) = F(x_1,x_2,\cdots,x_n) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2),\cdots,F_n^{-1}(u_n))。 \tag{3}$$

由式（3）可以先将边缘分布及相关结构分别处理，再加以整合，就能更有效地探讨各变量间的共同变动关系，进而估计得到更合适的联合概率分布。

2.2 几种常用的 Copula 函数

Copula 函数的种类很多，常用的是椭圆连接函数族（Elliptic Copulas）和 Archimedean 连接函数族（Archimedean Copulas），而且每一族中又有许多具体的 Copula 函数。不同的 Copula 函数具有不同的性质，在实际应用中，选择恰当的 Copula 函数需要遵循两个原则：一是建立的 Copula 模型应当易于操作和理解，避免出现参数意义不明的现象[9]；二是选择与样本数据相关结构相适应的 Copula 函数。椭圆 Copula 函数族具有对称的尾部相关性，这与金融数据的厚尾分布相违背；Archimedean Copula 函数是目前在金融领域应用最为广泛的一类 Copula 函数，而且构建和计算比较简单。下面介绍几种常用的 Archimedean Copula 函数（本文仅考虑二元情形）。

① Gumbel Copula 函数其分布函数的表达式如下：

$$C_\theta^{\mathrm{Gu}}(u,v) = \exp[-((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta)^{1/\theta}],\quad \theta \geqslant 1。 \tag{4}$$

Gumbel Copula 函数对变量在分布上尾处的变化十分敏感，因此能够快速捕捉到上尾相关的变化，可用于描述具有上尾相关特性的金融变量之间的相关关系。其参数θ描述了相关程度，当$\theta = 1$时，变量独立；当$\theta \to \infty$时，变量趋于完全相关；由式（1）、（4）得 Gumbel Copula 函数的上尾相关系数为$\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$。

② Clayton Copula 函数其分布函数表达式如下：

$$C_\theta^{\mathrm{Cl}}(u,v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta},\ \theta > 0。 \tag{5}$$

Clayton Copula 函数对变量在分布下尾处的变化十分敏感，因此能够快速捕捉到下尾相关的变化，可用于描述具有下尾相关特性的金融变量之间的相关关系。当$\theta = 0$和$\theta \to \infty$时，分别代表变量独立和变量完全一致相关；由式（2）、（5）得 Clayton Copula 函数的下尾相关系数为$\lambda_L = 2^{-1/\theta}$。

③ Frank Copula 函数其函数分布表达式如下：

$$C(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right),\quad \theta \in R/\{0\}。 \tag{6}$$

Frank Copula 函数的密度函数分布呈“U”字

型，分布具有对称性，因此无法捕捉到随机变量间的非对称相关关系[10]。

根据经验可知，金融数据大部分都具有非对称的特性，因此，只选取 Gumbel 和 Clayton Copula 函数进行尾部相关性分析。为了进一步说明 Gumbel（Clayton）Copula 函数对变量在分布上（下）尾处的变化十分敏感，利用 Matlab 可以产生 2 000 个二元 Gumbel 和 Clayton Copula 随机数并画图，分别见图 1、图 2。

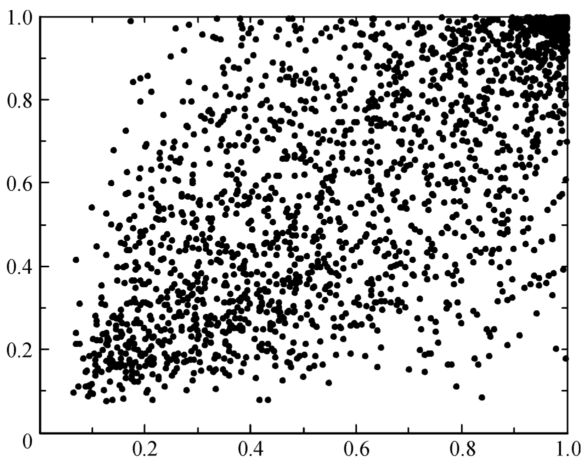

图 1　参数 θ 为 2 的二元 Gumbel Copula

Fig. 1　Bivariate Gumbel Copula with $\theta=2$

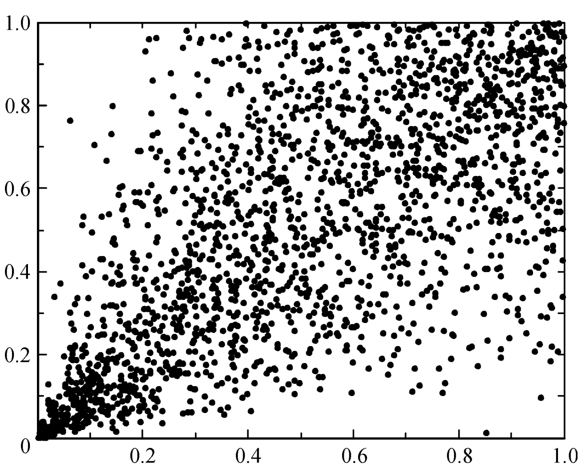

图 2　参数 θ 为 2 的二元 Clayton Copula

Fig. 2　Bivariate Clayton Copula with $\theta=2$

可知，Gumbel Copula 能够很好的描述上尾相关性，而 Clayton Copula 能够很好的描述下尾相关性，进一步说明选取这两种函数分别研究上尾和下尾相关性是合适的。

2.3　非参数法估计 θ

对于大多数单参数的 Archimedean Copula 函数，由于其生成元 $\varphi(t)$ 是参数 θ 的函数而且 $\varphi(t)$ 与 Kendall 秩相关系数 τ 存在如下关系[8]：

$$\tau = 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}\mathrm{d}t。\tag{7}$$

由 Gumbel Copula 函数的生成元 $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$ 及式(7)可以得到 τ 为 θ 的解析函数为 $\tau = (\theta-1)/\theta$，相应地，$\hat{\theta} = 1/(1-\hat{\tau})$；由 Clayton Copula 函数的生成元 $\varphi_\theta(t) = t^{-\theta}-1$ 及式(7)可以得到，τ 为 θ 的解析函数为 $\tau = \theta/(\theta+2)$，相应地 $\hat{\theta} = 2\hat{\tau}/(1-\hat{\tau})$。

为了估计出参数 θ，首先需要知道 Kendall τ 的估计值，起初 Kendall 秩相关系数 τ 不是通过 Copula 函数 $C(\cdot)$ 定义的，它是通过随机变量 (X,Y) 的一致概率与非一致概率的差来定义的[8]，即

$$\tau(X,Y) = P((X_1-X_2)(Y_1-Y_2)>0) - P((X_1-X_2)(Y_1-Y_2)<0),$$

其中，(X_1,Y_1) 和 (X_2,Y_2) 为随机变量 (X,Y) 的独立同分布样本。

令 $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)\}$ 为一个由随机变量 (X,Y) 的 n 组观测值组成的样本，其中 X，Y 均为连续的随机变量。若 $(x_i-x_j)(y_i-y_j)>0$，$i\neq j$，$i,j=1,2,\cdots,n$，则称 (x_i,y_i) 与 (x_j,y_j) 是一致的；类似的，若 $(x_i-x_j)(y_i-y_j)<0$，则称 (x_i,y_i) 与 (x_j,y_j) 是非一致的。用 C_n^r 表示从 n 个样本中取 r 个样本的组合数，显然样本中总共包含 C_n^2 项由观测值 (x_i,y_i) 和 (x_j,y_j) 构成的组合，且每项组合中的两组观测值 (x_i,y_i) 和 (x_j,y_j) 要么是一致的，要么是非一致的。将 C_n^2 项组合分为两部分，即 $C_n^2 = c+d$，其中 c 表示一致的组合的数量，d 表示非一致的组合的数量，定义

$$\hat{\tau} = \frac{c-d}{c+d} = (c-d)/\binom{n}{2} = \binom{n}{2}^{-1}\sum_{i<j}\operatorname{sign}[(x_i-x_j)(y_i-y_j)]\tag{8}$$

为样本 $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)\}$ 的 Kendall 秩相关系数[11]。

因此，可以将 $\hat{\theta}$ 计算出来，则 Copula 函数唯一确定，再由下式计算出上尾相关系数和下尾相关系数的估计值：

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{U}} = 2-2^{1/\hat{\theta}};\tag{9}$$

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{L}} = 2^{-1/\hat{\theta}}。\tag{10}$$

3 尾部相关性的 Copula 度量

3.1 计算参数 $\hat{\theta}$

本文选取国际期货市场黄金期货和白银期货从2009-10-14—2012-12-16的日开盘价为原始数据，样本有效数据为987个。为方便计算，对其进行对数变换得到对应的对数收益率为 $(x_i,y_i)=(\log(p_{i+1}/p_i),\log(q_{i+1}/q_i))$[12]。然后通过式(8)解得 $\hat{\tau}=0.62542$。最后根据 θ 与 τ 的关系式可以得到不同 Copula 函数对应的参数 θ 的估计值见表1。

表1 Copula 函数的参数估计

Table 1 Parameter estimation of Copulas

	$C(u,v)$	$\hat{\theta}(\hat{\tau})$	$\hat{\theta}$
Gumbel Copula	$C_\theta^{Gu}(u,v)=\exp[-((-\ln u)^\theta+(-\ln v)^\theta)^{1/\theta}]$	$\hat{\theta}=1/(1-\hat{\tau})$	2.6697
Clayton Copula	$C_\theta^{Cl}(u,v)=(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-1/\theta}$	$\hat{\theta}=2\hat{\tau}/(1-\hat{\tau})$	3.3393

两类 Copula 函数的参数 $\hat{\theta}$ 均在各自定义域内，说明用这两种 Copula 函数来描述尾部相关性是恰当的，即黄金收益率和白银收益率既有上尾相关性又有下尾相关性。

3.2 Copula 函数的检验

为了更进一步说明所选取的 Copula 函数可以描述黄金和白银收益率的尾部相关关系，对数据进行检验。估计参数时为了避免 Copula 函数边缘分布假设错误，直接利用 Kendall τ 来估计参数，因此并不知道数据具体的边缘分布函数。下面利用经验分布和 K_C 构造服从均匀分布的变量并用 *K-S* 统计量进行拟合优度检验。

单变量分布函数 $K_C(t)$ 定义为

$$K_C(t)=t-\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}。$$

其中，$\varphi(t)$ 是 Copula 函数的生成元[13]，$K_{C(F(X),G(Y))}(t)$ 服从标准均匀分布。设变量 X,Y 都服从经验分布，则利用 $\hat{\theta}$ 可以求出 $K_{C(F(X),G(Y))}(t)$。

对于 Gumbel Copula：

$$K_{C(F(X),G(Y))}^{Gu}(t)=t-\frac{t}{\theta}\ln t; \quad (11)$$

对于 Clayton Copula：

$$K_{C(F(X),G(Y))}^{Cl}(t)=t+\frac{t^{-\theta}-1}{\theta t^{-\theta-1}}。 \quad (12)$$

选择合适的 Copula 按照下面的步骤进行计算：①求对数收益率 $\{(x_i,y_i)\}_{1\leq i\leq n}$ 的分布函数 $F(x_i)$，$G(y_i)$（F 和 G 都是经验分布函数）；② 分别由式(4)和式(5)求出 $t_i^{Gu}=C_\theta^{Gu}(F(x_i),G(y_i))$ 和 $t_i^{Cl}=C_\theta^{Cl}(F(x_i),G(y_i))$；③ 将步骤②中求出的 t_i 分别代入式(11)和式(12)得 $K_{C(F(X),G(Y))}^{Gu}(t_i)$ 和 $K_{C(F(X),G(Y))}^{Cl}(t_i)$；④ $K_C\sim U(0,1)$，用 *K-S* 方法进行拟合优度检验，结果见表2。

表2 *K-S* 检验结果

Table 2 *K-S* inspection result

Copula	Z	P
Gumbel Copula	0.923	0.362
Clayton Copula	1.044	0.226

两种 Copula 函数的 $K_{C(F(X),G(Y))}(t)$ 均服从均匀分布。因此，用这两种 Copula 函数来研究黄金期货和白银期货收益率的尾部相关性是可行的。

3.3 尾部相关性研究

下面用 Gumbel Copula 与 Clayton Copula 函数分别对黄金期货和白银期货收益率的上尾部和下尾部进行相关性研究。根据式(9)、式(10)可以分别求出上尾相关系数和下尾相关系数的估计值 $\hat{\lambda}_U$ 和 $\hat{\lambda}_L$，见表3。

表3 $\hat{\lambda}_U$ 和 $\hat{\lambda}_L$ 与 Copula 函数参数的关系及对应值

Table 3 Relationship between $\hat{\lambda}_U$, $\hat{\lambda}_L$ and parameters of Copula and the corresponding values

Copula 类型	上尾相关系数	下尾相关系数	$\hat{\lambda}_U$	$\hat{\lambda}_L$
Gumbel Copula	$2-2^{1/\theta}$		0.7035	
Clayton Copula		$2^{-1/\theta}$		0.8126

可以看出，黄金期货与白银期货收益率的上尾相关系数为0.7035，下尾相关系数为0.8126；而且下尾相关系数大于上尾相关系数，说明黄金期货与白银期货在期货市场价格低谷阶段的相关性要高于期货市场价格高涨阶段的相关性；同时也与 Jondeau E 等[2]的研究结果相一致。

4 结　论

本文首先介绍了尾部相关性的概念，给出了几种常用的 Archimedean Copula 函数形式，并且选取了具有上尾相关性的 Gumbel Copula 函数和具有下尾相关性的 Clayton Copula 函数对国际期货市场中黄金期货和白银期货收益率的尾部相关性进行度量。然后运用非参数估计的方法估计出 Copula 函数中的参数，同时利用经验分布以及构造服从均匀分布的变量并用 *K-S* 统计量对所选取的 Copula 函数进行拟合优度检验。最后根据尾部相关系数公式分别求出两种期货收益率的上尾相关系数和下尾相关系数。结果表明，下尾相关系数大于上尾相关系数，说明在期货市场活跃时期黄金期货与白银期货的相关性要强于期货市场低迷时期的相关性，这也与金融市场的一般规律相符合。

参考文献：

[1] Frees E W, Valdez E A. Understanding relationships using copulas [J]. North American Actuarial Journal, 1998, 2 (1): 1－25.

[2] Jondeau E, Rockinger M. Testing for differences in the tails of stock-market returns [J]. Journal of Empirical Finance, 2003, 10 (5): 559－581.

[3] 柳会珍，顾岚．股票收益率分布的尾部行为研究 [J]．系统工程，2005，23 (2)：74－77.

[4] Juri A, Wüthrich M V. Copula convergence theorems for tail events [J]. Insurance Mathematics and Economics, 2002, 30 (3): 405－420.

[5] Joe H. Multivariate Models and Dependence Concepts [M]. London: Chapman & Hall, 1997.

[6] McNeil A J, Frey R, Embrechts P. Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools [M]. Princeton: Princeton University Press, 2005.

[7] 秦学志，王悦．尾部相关系数的渐进变化特征及其应用 [J]．系统工程理论与实践，2011，31 (2)：93－104.

[8] Nelsen R B. An Introduction to Copulas [M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

[9] Rosenberg J V, Schuermann T. A general approach to integrated risk management with skewed, fat-tailed risks [J]. Journal of Financial Economics, 2006, 79 (3): 569－614.

[10] 李石，卢祖帝．Copula 函数在风险价值度量中的应用 [J]．金融管理，2008，20 (4)：10－16.

[11] Serinaldi F. Analysis of inter-gauge dependence by Kendall's τ_K, upper tail dependence coefficient, and 2-copulas with application to rainfall fields [J]. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 2008, 22(6): 671－688.

[12] 李悦，程希骏．上证指数和恒生指数的 Copula 尾部相关性分析 [J]．系统工程，2006，24 (5)：88－92.

[13] Durrleman V, Nikeghbali A, Roncalli T. Which Copula is the right one [EJ/OL]. http://www.thierry-roncalli.com/download/copula-choice.pdf, 2000.

Tail dependence measurement in future market with Copula

SUN Guo-hua, SU Hong-liu, TANG Guo-qiang

(College of Science, Guilin University of Technology, Guilin 541006, China)

Abstract: Copula provides a new concept to solve the relationship among the structure of random variables. By choosing appropriate Copula function, the tail dependence of financial data can be measured well. Gumbel Copula and Clayton Copula is selected from the Archimedean Copulas to measure the tail dependence of international gold futures and silver futures respectively. The nonparametric estimation method is used to estimate parameters of Copula function. The result shows that the lower tail dependence is better than the upper tail dependence.

Key words: Copula; tail dependence; nonparametric estimation; *K-S* test