第29卷 第3期 桂 林 工 学 院 学 报 Vol. 29 No. 3
2009年8月 Journal of Guilin University of Technology Aug. 2009

文章编号：1006－544X（2009）03－0416－03

$\tilde{\rho}$ 混合序列加权和的若干收敛性质

冯凤香，邓光明

（桂林理工大学 理学院，广西 桂林 541004）

摘 要：讨论了 $\tilde{\rho}$ 混合序列加权和的弱收敛性、L_p 收敛性和完全收敛性定理，推广了前人的一系列结果。

关键词：$\tilde{\rho}$ 混合序列；加权和；弱收敛；L_p 收敛；完全收敛

中图分类号：O211.4 **文献标志码**：A

1 引言及引理

设$\{X_i, i \in \mathbf{N}\}$ 是概率空间(Ω,β,P) 上的随机变量序列，$F_S = \sigma(X_i, i \in S \subset \mathbf{N})$ 为σ－域，在β中给定 σ－域 F,R，令

$$\rho(F,R) = \sup\{|\operatorname{corr}(X,Y)|; X \in L_2(F), Y \in L_2(R)\},$$

其中 $\operatorname{corr}(X,Y) = \dfrac{EXY - EXEY}{\sqrt{\operatorname{Var}X \operatorname{Var}Y}}$，为相关系数。

Bradley[1] 引入如下的相依系数：对 $k \geqslant 0$，令 $\tilde{\rho}(k) = \sup\{\rho(F_S,R_T)$，有限子集 $S,T \subset \mathbf{N}$，且 $\operatorname{dist}(S,T) \geqslant k\}$。显然，$0 \leqslant \tilde{\rho}(k+1) \leqslant \tilde{\rho}(k) \leqslant 1$，且 $\tilde{\rho}(0) = 1$。

定义 对随机序列$\{X_i, i \in \mathbf{N}\}$，若存在 $k \in \mathbf{N}$，使 $\tilde{\rho}(k) < 1$，则称$\{X_i, i \in \mathbf{N}\}$ 为 $\tilde{\rho}$ 混合序列。

$\tilde{\rho}$混合与通常的ρ混合有一定的类似，但并不相同，它们互不包含。$\tilde{\rho}$ 混合是一类极为广泛的相依混合序列，$\tilde{\rho}$ 混合序列的矩不等式、完全收敛性、不变原理、强大数律、对数律和三级数定理、$\tilde{\rho}$ 混合阵列行和的收敛性等在文献[2－11] 中有讨论，本文进一步讨论 $\tilde{\rho}$ 混合序列加权和的弱收敛性、L_p 收敛性和完全收敛性定理，推广了前人的一系列结果。

注：对 $\tilde{\rho}$ 混合序列，可不失一般性假设 $\tilde{\rho}(1) < 1$。

本文一律以 c 记与 n 无关的正常数，“$\ll$” 表示通常的大“O”。

引理1[3] 设$\{X_i; i \geqslant 1\}$ 是$\tilde{\rho}$混合序列，$EX_i = 0$，则对 $0 < p \leqslant 2$，存在仅依赖于 p 和$\tilde{\rho}$的常数 c，使对于 $\forall n \geqslant 1$，有

$$E\Big|\sum_{i=1}^{n} X_i\Big|^p \leqslant c\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p,$$

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant n}\Big|\sum_{i=1}^{k} X_i\Big|^p \leqslant c\ln^p n\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^p。$$

2 主要结果

设$\{X_i; i \geqslant 1\}$ 为$\tilde{\rho}$混合序列，$\{a_{ni}, 1 \leqslant i \leqslant n, n \geqslant 1\}$ 是下三角实数矩阵，即当 $i > n$ 时，$a_{ni} = 0$，下面给出 $\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i$ 的若干收敛性质。

定理1 设$\{X_i; i \geqslant 1\}$ 是$\tilde{\rho}$混合序列，对$0 < p < 2$，有

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\geqslant 1} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x^p P(|a_{ni}X_i| \geqslant x) = 0, \quad (1)$$

则 $n^{-1/p}(S_n - ES_n) \xrightarrow{p} 0, n \to \infty$，其中 $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i$。

定理2 设$\{X_i; i \geqslant 1\}$ 是$\tilde{\rho}$混合序列，对$0 < p < 2$，有

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\geqslant 1} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} E|a_{ni}X_i|^p I_{(|a_{ni}X_i| \geqslant x)} = 0, \quad (2)$$

则 $n^{-1/p}(S_n - ES_n) \xrightarrow{L_p} 0, n \to \infty$，其中 $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i$。

定理3 设$\{X_i; i \geqslant 1\}$ 是$\tilde{\rho}$混合序列，对$0 < p < 2$及 $\delta > 2 + p$，有

收稿日期：2008－07－15

基金项目：国家自然科学基金资助项目（10661006）；广西教育厅科研项目（200807LX188）

作者简介：冯凤香（1975—），女，硕士，讲师，研究方向：概率极限理论。

$$\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geqslant 1} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x\ln^{\delta} xP(|a_{ni}X_i|^p \geqslant x) = 0, \quad (3)$$

则对 $\alpha p \geqslant 1$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} n^{-\alpha}|S_{nj} - ES_{nj}| > \varepsilon) < \infty, \forall \varepsilon > 0,$$

其中 $S_{nj} = \sum_{i=1}^{j} a_{ni}X_i$, $j \leqslant n$。

特别地,取 $a_{ni} = 1$, $S_j \triangleq \sum_{i=1}^{j} X_i$,则由上面定理分别得下列推论:

推论 1　设$\{X_i; i \geqslant 1\}$ 是$\hat{\rho}$混合序列,对$0 < p < 2$,有

$$\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geqslant 1} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} xP(|X_i|^p \geqslant x) = 0,$$

则 $n^{-1/p}(S_n - ES_n) \xrightarrow{p} 0, n\to\infty$。

推论 2　设$\{X_i; i \geqslant 1\}$ 是$\hat{\rho}$混合序列,对$0 < p < 2$,有

$$\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geqslant 1} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}|X_i|^p I_{(|X_i|\geqslant x)} = 0,$$

则 $n^{-1/p}(S_n - ES_n) \xrightarrow{L_p} 0, n\to\infty$。

推论 3　设$\{X_i; i \geqslant 1\}$ 是$\hat{\rho}$混合序列,对$0 < p < 2$及$\delta > 2 + p$,有

$$\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geqslant 1} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x\log^{\delta} xP(|X_i|^p \geqslant x) = 0, \quad (4)$$

则对 $\alpha p \geqslant 1$,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} n^{-\alpha}|S_j - ES_j| > \varepsilon) < \infty, \forall \varepsilon > 0。$$

3　主要结果的证明

定理 1 的证明　取 $x_n = n^{1/p}$,当 $n\to\infty$ 时,显然 $x_n \to \infty$。记

$$X_{ni}' = a_{ni}X_i I_{(|a_{ni}X_i|<x_n)},\ X_{ni}'' = a_{ni}X_i I_{(|a_{ni}X_i|\geqslant x_n)},$$

$$S_n' \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_{ni}',\ S_n'' \triangleq \sum_{i=1}^{n} X_{ni}'',$$

因 $P(n^{-1/p}|S_n - ES_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|S_n' - ES_n'| \geqslant \varepsilon n^{1/p}/2) + P(|S_n'' - ES_n''| \geqslant \varepsilon n^{1/p}/2) \triangleq I_{n1} + I_{n2}$,故为证定理 1,只需证 $I_{ni}\to 0, n\to\infty, i = 1,2$。由 Markov 不等式以及引理,有

$$\begin{aligned} I_{n1} &\ll n^{-2/p}\mathrm{E}(S_n' - ES_n')^2 \ll n^{-2/p}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_{ni}')^2 \\ &= n^{-2/p}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(a_{ni}X_i)^2 I_{(|a_{ni}X_i|<x_n)} \\ &= n^{-2/p}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_n^2} P((a_{ni}X_i)^2 I_{(|a_{ni}X_i|<x_n)} \geqslant y)\mathrm{d}y \\ &\ll n^{-2/p}\sum_{i=1}^{n}\int_0^{x_n} P(|a_{ni}X_i| \geqslant y)y\mathrm{d}y \\ &= n^{1-2/p}\int_0^{x_n}\sum_{i=1}^{n} n^{-1}P(|a_{ni}X_i| \geqslant y)y\mathrm{d}y。 \end{aligned}$$

由式(1),$\forall \varepsilon > 0, \exists M$,使当 $y > M$ 时,有 $\sup_{n\geqslant 1} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} P(|a_{ni}X_i| \geqslant y) \leqslant \varepsilon y^{-p}$,即当 $x_n > M$ 时,有

$$\begin{aligned} I_{n1} &\ll n^{1-2/p}\Big(\int_0^{M} y\sup_{n\geqslant 1}\sum_{i=1}^{n} n^{-1}P(|a_{ni}X_i| \geqslant y)\mathrm{d}y + \\ &\quad \int_M^{x_n} \varepsilon y^{-p+1}\mathrm{d}y\Big) \leqslant n^{1-2/p}(M + \varepsilon x_n^{-p+2}) \\ &= n^{1-2/p}(M + \varepsilon n^{-1+2/p}) = Mn^{1-2/p} + \varepsilon。 \end{aligned}$$

由 $0 < p < 2$,以及 ε 的任意性,得 $I_{n1}\to 0, n\to\infty$。

下证 $I_{n2}\to 0, n\to\infty$。由 X_{ni}'' 的定义及式(1)等价于 $\limsup_{x\to\infty}\sup_{n\geqslant 1} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} xP(|a_{ni}X_i|^p \geqslant x) = 0$,有

$$\begin{aligned} I_{n2} &\leqslant P(\sum_{i=1}^{n}|X_{ni}'' - \mathrm{E}X_{ni}''| \geqslant \varepsilon n^{1/p}/2) \\ &\leqslant P(\exists i; 1\leqslant i\leqslant n, |a_{ni}X_i| \geqslant x_n) \\ &= P(\bigcup_{i=1}^{n}(|a_{ni}X_i| \geqslant x_n)) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(|a_{ni}X_i| \geqslant n^{1/p}) \\ &\leqslant \sup_{n\geqslant 1} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} nP(|a_{ni}X_i|^p \geqslant n) \to 0, n\to\infty。 \end{aligned}$$

证毕。

定理 2 的证明　仍用定理 1 的记号,但这里取 $x_n = n^{(1-p/2)/4}$,因 $0 < p < 2$,所以当 $n\to\infty$ 时,$x_n \to \infty$。由引理、Jensen 不等式、C_r 不等式及式(2),有

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}|n^{-1/p}(S_n - ES_n)|^p \\ &\ll n^{-1}\mathrm{E}|S_n' - ES_n'|^p + n^{-1}\mathrm{E}|S_n'' - ES_n''|^p \\ &\leqslant n^{-1}(\mathrm{E}(S_n' - ES_n')^2)^{p/2} + n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}|X_{ni}''|^p \\ &\leqslant n^{-1}(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_{ni}')^2)^{p/2} + n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}|X_{ni}''|^p \\ &\leqslant n^{-1}(\sum_{i=1}^{n} x_n^2)^{p/2} + n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}|a_{ni}X_i|^p I_{(|a_{ni}X_i|\geqslant x_n)} \\ &= n^{3p/4-p^2/8-1} + n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}|a_{ni}X_i|^p I_{(|a_{ni}X_i|\geqslant x_n)} \to 0, \end{aligned}$$

$n\to\infty$。

证毕。

定理 3 的证明　仍用定理 1 的记号,但这里取 $x_n = n^{\alpha(2-p)/4}$, $\forall \varepsilon > 0$,有

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} n^{-\alpha}|S_{nj} - ES_{nj}| > \varepsilon) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} n^{-\alpha}|S_{nj}' - ES_{nj}'| > \varepsilon/2) + \\ &\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2} P(\max_{1\leqslant j\leqslant n} n^{-\alpha}|S_{nj}'' - ES_{nj}''| > \varepsilon/2) \triangleq J_{n1} + J_{n2}。 \end{aligned}$$

由 Markov 不等式、引理及 $|X_{ni}'| \leqslant x_n$,得

$$\begin{aligned} J_{n1} &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-2\alpha} \mathrm{E}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_{nj}' - \mathrm{E}S_{nj}'|^2) \\ &\ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-2-2\alpha} \log^2 n \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}|X_{ni}'|^2 \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha p-1-2\alpha+\alpha(2-p)/2} \log^2 n \\ &\ll \sum_{n=1}^{\infty} (\log^2 n)/n^{1+\alpha(2-p)/2} < \infty 。 \end{aligned}$$

由 Markov 不等式及引理,有

$$\begin{aligned} J_{n2} &\ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \mathrm{E}(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_{nj}'' - \mathrm{E}S_{nj}''|)^p \\ &\ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \log^p n \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}|X_{ni}''|^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \log^p n \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}|a_{ni}X_i|^p I_{(|a_{ni}X_i|\geqslant x_n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \log^p n \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} P(|a_{ni}X_i|^p I_{(|a_{ni}X_i|\geqslant x_n)} \geqslant t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \log^p n \sum_{i=1}^{n} [\int_0^{x_n^p} P(|a_{ni}X_i|^p I_{(|a_{ni}X_i|\geqslant x_n)} \geqslant t)\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{x_n^p}^{\infty} P(|a_{ni}X_i|^p I_{(|a_{ni}X_i|\geqslant x_n)} \geqslant t)\mathrm{d}t] \\ &\ll \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \log^p n \sum_{i=1}^{n} (x_n^p P(|a_{ni}X_i| \geqslant x_n) + \\ &\quad \int_{x_n^p}^{\infty} P(|a_{ni}X_i|^p \geqslant t)\mathrm{d}t) 。 \end{aligned}$$

因式(3)等价于 $\lim\limits_{x\to\infty} \sup\limits_{n\geqslant 1} n^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} x^p \ln^{\delta} x P(|a_{ni}X_i| \geqslant x) = 0$,故 $\exists M$,使当 $x > M$ 时,有

$$\sup_{n\geqslant 1} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} P(|a_{ni}X_i| \geqslant x) \leqslant x^{-p} \log^{-\delta} x,$$

$$\sup_{n\geqslant 1} n^{-1} \sum_{i=1}^{n} P(|a_{ni}X_i|^p \geqslant x) \leqslant x^{-1} \log^{-\delta} x 。$$

又因 $x_n \to \infty$,所以 $\exists n_0$,使当 $n \geqslant n_0$ 时,有 $x_n > M$。故由 $\delta > 2 + p$,得

$$\begin{aligned} J_{n2} &\ll \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-1} \log^p n \sum_{i=1}^{n} [n^{-1} x_n^p P(|a_{ni}X_i| \geqslant x_n) \\ &\quad + \int_{x_n^p}^{\infty} n^{-1} P(|a_{ni}X_i|^p \geqslant t)\mathrm{d}t] \\ &\ll \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-1} \log^p n \log^{-\delta} x_n + \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{-1} \log^p n \int_{x_n^p}^{\infty} t^{-1} \log^{-\delta} t \mathrm{d}t \\ &\ll \sum_{n=n_0}^{\infty} (\log^p n)/(n\log^{\delta} x_n) + \sum_{n=n_0}^{\infty} (\log^p n)/(n\log^{\delta-1} x_n) \\ &\ll \sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\log^{\delta-p-1} n) < \infty 。 \end{aligned}$$

证毕。

参考文献:

[1] Bradley R C. Equivalent Mixing Conditions for Random Fields [M]. Technical Report No. 336, Center for Stochastic Processes. Chapel Hill: Univ. of North Carolina, 1990.

[2] Bryc W, Smolenski W. Moment conditions for almost sure convergence of weakly correlated random variables [J]. Proceeding of American Math Society, 1993, 119 (2): 629 –635.

[3] 杨善朝. 一类随机变量部分和的矩不等式及其应用 [J]. 科学通报, 1998, 43 (17): 1823 – 1827.

[4] 吴群英. 不同分布 $\hat{\rho}$ 混合序列的强收敛速度 [J]. 数学研究与评论, 2004, 24 (1): 173 – 179.

[5] 吴群英. $\hat{\rho}$ 混合序列的若干收敛性质 [J]. 工程数学学报, 2001, 18 (3): 58 – 64, 50.

[6] 吴群英. $\hat{\rho}$ 混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性 [J]. 应用数学, 2002, 15 (1): 1 – 4.

[7] 吴群英. $\hat{\rho}$ 混合序列的不变原理 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2003, 19 (1): 12 – 15.

[8] 刘筱萍. 不同分布 $\hat{\rho}$ 混合序列的完全收敛性 [J]. 桂林工学院学报, 2006, 26 (2): 298 – 301.

[9] 冯凤香. 不同分布 $\hat{\rho}$ 混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性 [J]. 桂林工学院学报, 2008, 28 (2): 282 – 284.

[10] 蔡光辉, 郭宝才. $\hat{\rho}$ 混合序列的对数律和强大数律 [J]. 科技通报, 2006, 22 (3): 288 – 291.

[11] 吴群英. $\hat{\rho}$ 混合阵列行和的若干极限定理 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2007, 23 (4): 458 – 462.

Convergence Properties for Weighted Sums of $\tilde{\rho}$ Mixing Random Sequences

FENG Feng-xiang, DENG Guang-ming

(*School of Science*, *Guilin University of Technology*, *Guilin* 541004, *China*)

Abstract: The weak law of large numbers, L_p convergence and complete convergence for weighted sums of $\tilde{\rho}$ mixing random sequences are discussed. The discussion generalizes the results of a series of papers .

Key words: $\tilde{\rho}$ mixing random sequences; weighted sums; the weak law of large numbers; L_p convergence; complete convergence