文章编号：1006－544X（2008）01－0025－04

压电智能板分析的样条有限点法

秦 荣，张永兵，李秀梅

（广西大学 土木建筑工程学院，南宁 530004）

摘 要：从高阶剪切变形理论、智能本构关系、瞬时变分原理和样条离散化出发，建立了压电智能板分析的样条有限点法。对压电智能板的变形进行了分析，结果与相应的有限元解作了详细的比较，证明了本文方法的正确性。计算结果表明，利用样条有限点法进行智能结构的分析，计算模型简单，物理关系明确，与有限元法相关的计算模型相比，具有较大的优越性，实用价值高。

关键词：高阶剪切变形理论；样条有限点法；压电层合板

中图分类号：O343.2；TB332 **文献标志码**：A

近年来，压电材料由于其良好的机电耦合特性，已被广泛地应用于结构形状控制等方面。在复合材料层合板中，采用表面粘贴压电材料铺层，形成含压电层层合板，目前常采用的分析方法是有限元法，由于压电介质机电耦合的复杂性，用有限元法建模存在一定的困难和缺陷。

本文从高阶剪切变形理论出发，建立了压电层合板的动力模型，编制了相关程序，对压电层合板的变形进行分析。通过与有限元解的比较，验证了本文方法的正确性。

1 位移模式

本文位移模式采用 Reddy[1] 建立的高阶剪切变形理论：

$$\begin{cases} u(x,y,z,t) = u_0(x,y,t) - \dfrac{4z^3}{3h^2}\dfrac{\partial w}{\partial x} + (z - \dfrac{4z^3}{3h^2})\theta_x(x,y,t), \\ v(x,y,z,t) = v_0(x,y,t) - \dfrac{4z^3}{3h^2}\dfrac{\partial w}{\partial y} + (z - \dfrac{4z^3}{3h^2})\theta_y(x,y,t), \\ w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t)。 \end{cases} \tag{1}$$

式中：u、v、w 为板内任一点分别沿 x、y、z 方向的位移分量；u_0、v_0、w_0 为板中面任一点分别沿 x、y、z 方向的位移分量；θ_x、θ_y 为转角；h 为智能板的厚度。

2 本构关系

采用线弹性－压电本构关系

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D\varepsilon} - \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}, \\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{e\varepsilon} + \boldsymbol{\zeta E}。 \end{cases} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{\sigma}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{E}$ 分别为应力、电位移及电场强度向量；$\boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{e}$ 及 $\boldsymbol{\zeta}$ 分别为弹性矩阵、压电矩阵及介电常数矩阵。

电场强度向量 $\boldsymbol{E}$ 是指电势 $\boldsymbol{\Phi}$ 负的梯度，它们的关系为

$$\boldsymbol{E} = [E_x \quad E_y \quad E_z]^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

其中 $E_x = -\boldsymbol{\Phi}_{,x}$；$E_y = -\boldsymbol{\Phi}_{,y}$；$E_z = -\boldsymbol{\Phi}_{,z}$。

$\boldsymbol{\Phi}$ 为电势；E_x、E_y、E_z 分别为 x、y、z 方向的电场强度；$\boldsymbol{\Phi}_{,x}$、$\boldsymbol{\Phi}_{,y}$、$\boldsymbol{\Phi}_{,z}$ 分别为对 x、y、z 的导数。

3 变分原理

对智能板的动力分析，一般采用 Hamilton 原理，本章采用瞬时最小势能原理[2]。

4 样条有限点法

4.1 样条离散化构造板位移函数

智能板由主板和压电材料组成，压电材料连续分布在主板的上下表面，分别充当驱动器及传感器

收稿日期：2007－03－07

基金项目：国家自然科学基金资助项目（19872020）；广西研究生教育创新计划资助项目（2006105930814D05）

作者简介：秦 荣（1936－），男，教授，研究方向：智能结构力学，E-mail：zhangbing111@sina.com。

元件。在板中面沿 x 方向样条离散化,如图 1 所示。

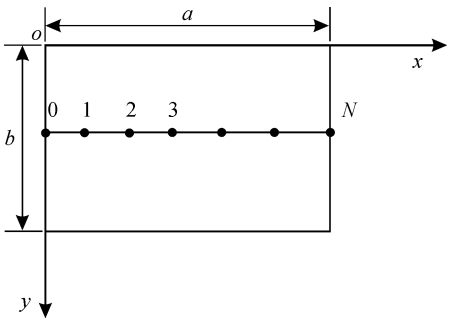


图 1 压电板平面图

Fig. 1 Plan of the piezoelectric plate

$$\Delta: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = a;$$
$$x_i = x_0 + ih_x, \quad h_x = a/N。$$

则它的位移函数及电势函数可以采用以下形式

$$u_0 = \sum_{m=1}^{r} [\phi]\{u\}_m X_m(y),\ v_0 = \sum_{m=1}^{r} [\phi]\{v\}_m Y_m(y),$$
$$w_0 = \sum_{m=1}^{r} [\phi]\{w\}_m Z_m(y),\theta_x = \sum_{m=1}^{r} [\phi]\{\theta_x\}_m \Theta_m(y),$$
$$\theta_y = \sum_{m=1}^{r} [\phi]\{\theta_y\}_m T_m(y),\Phi = \sum_{m=1}^{r} [\phi]\{\Phi\}_m S_m(y)。 \tag{4}$$

式中, $[\phi] = [\phi_0 \quad \phi_1 \quad \phi_2 \quad \cdots \quad \phi_N]$;

$\{\alpha\}_m = [\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_N]^{\mathrm{T}}$,

其中,$\alpha = u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y, \Phi$。

$\phi_i(x)$ 为三次 B 样条函数构成的基函数,可以采用各种不同的形式,本文采用广义参数法[3]。X_m、Y_m、Z_m、Θ_m、T_m 及 S_m 为正交函数或正交多项式,它们满足 y 方向的两对边的边界条件。例如,若 y 方向两对边为简支边(y 方向的边长为 b),

$$X_m = \sin(\frac{m\pi}{b}y),Y_m = \cos(\frac{m\pi}{b}y),$$

$$Z_m = \sin(\frac{m\pi}{b}y),\Theta_m = \sin(\frac{m\pi}{b}y),T_m = \cos(\frac{m\pi}{b}y)。$$

利用三角函数的正交性,处理边界很方便。

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{u} = [N]\{V\},\ \boldsymbol{u}_0 = [N_0]\{V\},\boldsymbol{\Phi} = [N_A]\{\Phi\},\\ &\boldsymbol{\varepsilon} = [A]\{V\},\boldsymbol{E} = -[H]\{\Phi\}。\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

式中:

$$\left.\begin{aligned} \{V\} &= [\{V\}_1^{\mathrm{T}} \quad \{V\}_2^{\mathrm{T}} \quad \{V\}_3^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \{V\}_r^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\\ [N] &= [[N]_1 \quad [N]_2 \quad [N]_3 \quad \cdots \quad [N]_r],\\ [N_0] &= [[N_0]_1 \quad [N_0]_2 \quad [N_0]_3 \quad \cdots \quad [N_0]_r],\\ [N_A] &= [[N_A]_1 \quad [N_A]_2 \quad [N_A]_3 \quad \cdots \quad [N_A]_r],\\ [A] &= [[A]_1 \quad [A]_2 \quad [A]_3 \quad \cdots \quad [A]_r],\\ \{\Phi\} &= [\{\Phi\}_1^{\mathrm{T}} \quad \{\Phi\}_2^{\mathrm{T}} \quad \{\Phi\}_3^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \{\Phi\}_r^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\\ [H] &= [[H]_1 \quad [H]_2 \quad [H]_3 \quad \cdots \quad [H]_r]。\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} &\{V\}_m = [\{u_0\}_m^{\mathrm{T}} \quad \{v_0\}_m^{\mathrm{T}} \quad \{w_0\}_m^{\mathrm{T}} \quad \{\theta_x\}_m^{\mathrm{T}} \quad \{\theta_y\}_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\\ &[N_0]_m = \mathrm{diag}([\phi]X_m, [\phi]Y_m, [\phi]Z_m, [\phi]\Theta_m, [\phi]T_m),\\ &[H]_m = [[\phi']^{\mathrm{T}}S_m \quad [\phi]^{\mathrm{T}}S_m' \quad [\phi]^{\mathrm{T}}S_m/h_2]^{\mathrm{T}}。\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$[N]_m = \begin{bmatrix} [\phi]X_m & [0] & [N]_{13} & [N]_{14} & [0] \\ [0] & [\phi]Y_m & [N]_{23} & [0] & [N]_{25} \\ [0] & [0] & [\phi]Z_m & [0] & [0] \end{bmatrix}。 \tag{8}$$

$$[N_A]_m = [\phi]S_m,\ m = 1,2,3,\cdots,r。 \tag{9}$$

$$[A]_m = \begin{bmatrix} [\phi']X_m & [0] & [A]_{13} & [A]_{14} & [0] \\ [0] & [\phi]Y_m' & [A]_{23} & [0] & [A]_{25} \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [\phi]X_m' & [\phi']Y_m & [A]_{43} & [A]_{44} & [A]_{45} \\ [0] & [0] & [A]_{53} & [0] & [A]_{55} \\ [0] & [0] & [A]_{63} & [A]_{64} & [0] \end{bmatrix}。 \tag{10}$$

式中:h_2 为压电层的厚度;其余为

$$\left.\begin{aligned} &[N]_{13} = -\frac{4z^3}{3h^2}[\phi']Z_m,\ [N]_{14} = (z - \frac{4z^3}{3h^2})[\phi]\Theta_m,\\ &[N]_{23} = -\frac{4z^3}{3h^2}[\phi]Z_m',\ [N]_{25} = (z - \frac{4z^3}{3h^2})[\phi]T_m,\\ &[A]_{13} = -\frac{4z^3}{3h^2}[\phi'']Z_m,\ [A]_{14} = (z - \frac{4z^3}{3h^2})[\phi']\Theta_m,\\ &[A]_{23} = -\frac{4z^3}{3h^2}[\phi]Z_m'',\ [A]_{25} = (z - \frac{4z^3}{3h^2})[\phi]T_m',\\ &[A]_{43} = -\frac{8z^3}{3h^2}[\phi']Z_m',[A]_{44} = (z - \frac{4z^3}{3h^2})[\phi]\Theta_m',\\ &[A]_{45} = (z - \frac{4z^3}{3h^2})[\phi']T_m,\ [A]_{53} = (1 - \frac{4z^2}{h^2})[\phi]Z_m',\\ &[A]_{55} = (1 - \frac{4z^2}{h^2})[\phi]T_m,\ [A]_{63} = (1 - \frac{4z^2}{h^2})[\phi']Z_m,\\ &[A]_{64} = (1 - \frac{4z^2}{h^2})[\phi]\Theta_m。\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中:h 为智能板厚度;$[\phi'']$ 为 $[\phi]$ 对 x 的二阶导数;$[\phi']$ 为 $[\phi]$ 对 x 的一阶导数;Z_m''、Z_m' 分别为 Z_m 对 y 的二阶、一阶导数;Θ_m' 为 Θ_m 对 y 的一阶导数。

4.2 建立智能样条离散化泛函

设智能板由 3 部分组成,上下两层为压电材料,它们分别充当驱动器及传感器,中间一层为主结构,由弹性材料构成。Π 为板壳总势能泛函,由瞬时最小势能原理[2] 可得

$$\delta\Pi = 0; \tag{12}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V [\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}\boldsymbol{E} - 2\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F} - c\dot{\boldsymbol{u}} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}})]\mathrm{d}V - \int_\Gamma \boldsymbol{u}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Gamma + \int_V Q\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}V - \int_\Gamma \boldsymbol{\Phi}\bar{Q}\mathrm{d}\Gamma。 \tag{13}$$

式中：

$$\boldsymbol{u}_0 = [u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \theta_x \quad \theta_y]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{q} = [q_x \quad q_y \quad q_z \quad m_x \quad m_y]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F} - c\dot{\boldsymbol{u}} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}},\ \boldsymbol{u} = [u \quad v \quad w]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{31}]^{\mathrm{T}}。$$

式中，$\boldsymbol{q}$、$\boldsymbol{F}$ 为面力向量及体力向量；$\boldsymbol{u}$、$\ddot{\boldsymbol{u}}$ 分别为速度及加速度向量；ρ、c 分别为材料质量密度及阻尼系数；Q 为电荷密度。由式(13)可得

$$\begin{aligned}\Pi = {} & \frac{1}{2}\{V\}^{\mathrm{T}}[K^*]\{V\} + \{V\}^{\mathrm{T}}([C]\{\dot{V}\} + [M]\{\ddot{V}\}) \\ & + \frac{1}{2}(\{V\}^{\mathrm{T}}[\overline{K}_{\mathrm{p}}]\{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{p}}\} + \{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{p}}\}^{\mathrm{T}}[\overline{K}_{\mathrm{p}}]^{\mathrm{T}}\{V\} - \\ & \{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{p}}\}^{\mathrm{T}}[\widetilde{K}_{\mathrm{p}}]\{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{p}}\}) + \frac{1}{2}(\{V\}^{\mathrm{T}}[\overline{K}_{\mathrm{s}}]\{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{s}}\} + \\ & \{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{s}}\}^{\mathrm{T}}[\overline{K}_{\mathrm{s}}]^{\mathrm{T}}\{V\} - \{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{s}}\}^{\mathrm{T}}[\widetilde{K}_{\mathrm{s}}]\{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{s}}\}) - \\ & \{V\}^{\mathrm{T}}\{\bar{f}\} - \{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{p}}\}^{\mathrm{T}}\{\bar{f}_{\mathrm{p}}\} - \{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{s}}\}^{\mathrm{T}}\{\bar{f}_{\mathrm{s}}\}。\end{aligned} \tag{14}$$

这是智能板的样条离散化泛函。式中

$$\left.\begin{aligned}&[M] = [M_{\mathrm{a}}] + [M_{\mathrm{p}}] + [M_{\mathrm{s}}],\\ &[C] = [C_{\mathrm{a}}] + [C_{\mathrm{p}}] + [C_{\mathrm{s}}],\\ &\{\bar{f}\} = \{P\} + \{F\},\{\bar{f}_i\} = \{f_i\} + \{Q_i\},\\ &[K^*] = [K_{\mathrm{a}}^*] + [K_{\mathrm{p}}^*] + [K_{\mathrm{s}}^*]。\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&[M_i] = \int_{V_i}[N]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\rho}_i[N]\mathrm{d}V,[C_i] = \int_{V_i}[N]^{\mathrm{T}}c_i[N]\mathrm{d}V,\\ &[K_i^*] = \int_{V_i}[A]^{\mathrm{T}}D_i[A]\mathrm{d}V,[\overline{K}_{\mathrm{p}}] = \int_{V_{\mathrm{p}}}[A]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}[H]\mathrm{d}V,\\ &[\overline{K}_{\mathrm{s}}] = \int_{V_{\mathrm{s}}}[A]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}[H]\mathrm{d}V,[\widetilde{K}_{\mathrm{p}}] = \int_{V_{\mathrm{p}}}[H]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}[H]\mathrm{d}V,\\ &[\widetilde{K}_{\mathrm{s}}] = \int_{V_{\mathrm{s}}}[H]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\zeta}[H]\mathrm{d}V,\{P\} = \int_{\Gamma}[N_0]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Gamma,\\ &\{Q_i\} = \int_{V_i}[N_{\mathrm{A}}]^{\mathrm{T}}Q_i\mathrm{d}V,\{f_i\} = \int_{\Gamma_i}[N_A]^{\mathrm{T}}\overline{Q}_i\mathrm{d}\Gamma,\\ &i = \mathrm{a},\mathrm{p},\mathrm{s}。\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

式中：$[M_{\mathrm{a}}]$ 为主板的质量矩阵；$[M_{\mathrm{p}}]$ 为驱动器的质量矩阵；$[M_{\mathrm{s}}]$ 为传感器的质量矩阵；$[K_{\mathrm{a}}^*]$ 为主板的刚度矩阵；$[K_{\mathrm{p}}^*]$ 为驱动器的刚度矩阵；$[K_{\mathrm{s}}^*]$ 为传感器的刚度矩阵；$[\overline{K}_{\mathrm{p}}]$ 为主结构与驱动器的耦合刚度矩阵；$[\overline{K}_{\mathrm{s}}]$ 为主结构与传感器的耦合刚度矩阵；$[\widetilde{K}_{\mathrm{p}}]$ 为驱动器的自感应刚度矩阵；$[\widetilde{K}_{\mathrm{s}}]$ 为传感器的自适应刚度矩阵；$\{P\}$ 为外部施加的机械力矢量；$\{f_{\mathrm{p}}\}$ 为由于电荷作用在压电驱动器上产生的力矢量；$\{f_{\mathrm{s}}\}$ 为由于电荷作用在压电传感器上产生的力矢量。

4.3　建立智能板样条离散化动力模型

利用智能瞬时变分原理可得到智能板的动力模型

$$[M]\{\ddot{V}\} + [C]\{\dot{V}\} + [K^*]\{V\} + [\overline{K}_{\mathrm{p}}]\{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{p}}\} + [\overline{K}_{\mathrm{s}}]\{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{s}}\} = \{\bar{f}\}, \tag{17}$$

$$[\overline{K}_{\mathrm{p}}]^{\mathrm{T}}\{V\} - [\widetilde{K}_{\mathrm{p}}]\{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{p}}\} = \{\bar{f}_{\mathrm{p}}\}, \tag{18}$$

$$[\overline{K}_{\mathrm{s}}]^{\mathrm{T}}\{V\} - [\widetilde{K}_{\mathrm{s}}]\{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{s}}\} = \{\bar{f}_{\mathrm{s}}\}。 \tag{19}$$

由式(17)及(18)得

$$\left.\begin{aligned}\{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{p}}\} &= [\widetilde{K}_{\mathrm{p}}]^{-1}[\overline{K}_{\mathrm{p}}]^{\mathrm{T}}\{V\} - [\widetilde{K}_{\mathrm{p}}]^{-1}\{\bar{f}_{\mathrm{p}}\},\\ \{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{s}}\} &= [\widetilde{K}_{\mathrm{s}}]^{-1}[\overline{K}_{\mathrm{s}}]^{\mathrm{T}}\{V\} - [\widetilde{K}_{\mathrm{s}}]^{-1}\{\bar{f}_{\mathrm{s}}\}。\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

将式(20)代入式(17)，凝聚掉电自由度，得到具有传感器和驱动器的智能板的不含电自由度的样条离散化动力方程

$$[M]\{\ddot{V}\} + [C]\{\dot{V}\} + [K]\{V\} = \{f\}, \tag{21}$$

式中：$[M]$、$[C]$、$[K]$ 分别为质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵；$\{\ddot{V}\}$、$\{\dot{V}\}$、$\{V\}$ 及 $\{f\}$ 分别为加速度、速度、位移及等效力向量。其中：

$$\left.\begin{aligned}[K] &= [K^*] + [\overline{K}_{\mathrm{p}}][\widetilde{K}_{\mathrm{p}}]^{-1}[\overline{K}_{\mathrm{p}}]^{\mathrm{T}} + [\overline{K}_{\mathrm{s}}][\widetilde{K}_{\mathrm{s}}]^{-1}[\overline{K}_{\mathrm{s}}]^{\mathrm{T}},\\ \{f\} &= \{\bar{f}\} + [\overline{K}_{\mathrm{p}}][\widetilde{K}_{\mathrm{p}}]^{-1}\{\bar{f}_{\mathrm{p}}\} + [\overline{K}_{\mathrm{s}}][\widetilde{K}_{\mathrm{s}}]^{-1}\{\bar{f}_{\mathrm{s}}\}。\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

这种建立智能板动力模型的方法称为样条有限点法。

在智能结构压电传感元件层上，一般情况下没有外电场，外加电荷为0，即：$Q_{\mathrm{s}} = \overline{Q}_{\mathrm{s}} = 0$，因此 $\{\bar{f}_{\mathrm{s}}\} = 0$。因此，压电传感器上的电势输出为

$$\{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{s}}\} = [\widetilde{K}_{\mathrm{s}}]^{-1}[\overline{K}_{\mathrm{s}}]^{\mathrm{T}}\{V\}。 \tag{23}$$

5　算　例

四边简支压电层合板，上下粘贴压电材料，中间为基板，基板采用各向同性弹性材料（本例中采用钢），压电材料选自文献［4］，基板的厚度为 h_1，上下压电层厚度均为 h_2。

压电材料的参数如下：

$$e_{31} = e_{32} = -5.20\ \mathrm{C/m^2}, e_{33} = 15.08\ \mathrm{C/m^2},$$

$$e_{15} = e_{24} = 12.72\ \mathrm{C/m^2}, \zeta_{11} = \zeta_{22} = 1\,475\zeta_0,$$

$$\zeta_{33} = 1\,300\zeta_0, \zeta_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}。$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}81.3 & 0.329 & 0.432 & 0 & 0 & 0\\ 0.329 & 81.3 & 0.432 & 0 & 0 & 0\\ 0.432 & 0.432 & 64.5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 25.6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 25.6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30.6\end{bmatrix}\times 10^{9}\ \mathrm{Pa};$$

钢 $E = 2.1 \times 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$, $\mu = 0.30$;

荷载 $q = 1 \times 10^{6}\ \mathrm{N/m^2}$;

板边长 $a = 0.1$ m; 板宽 $b = 0.1$ m。

本例利用样条有限点法及有限元法分析均布荷载对压电智能板挠度的影响。其中有限元解为在 ANSYS9.0 中建模，基板采用 SOLID45 单元，压电层采用 SOLID5 耦合单元，计算结果见图 2 及表 1。图 2 为板的中平面上 $y = b/2$ 中心线挠度曲线，图中 FEM 为有限元法，SFPM 为样条有限点法。表 1 为在均布荷载作用下不同厚度的板的中心点的挠度值。

从以上分析可以看出，采用本文方法与有限元法所得到的结果相差很小。

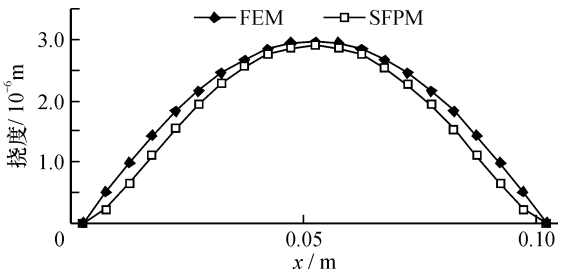


图 2 均布荷载作用下板的挠度沿 x 方向的分布

Fig. 2 Displacement of the piezoelectric plate along x-axis under uniform load

表 1 均布荷载作用下不同板厚的板中心点的挠度

Table 1 Central deflection of different thickness under uniform load 1E − 6

层厚/m		文解(SFPM)	有限元解(FEM)
h_1	h_2		
0.04	0.002 5	0.578 7	0.582 0
0.03	0.002 5	1.001 9	0.995 0
0.02	0.002 5	2.308 6	2.480 2
0.02	0.005	1.802 0	1.923 7
0.02	0.010	1.178 8	1.192 6
0.02	0.015	0.803 6	0.808 3
0.02	0.020	0.596 4	0.593 4
0.01	0.002 5	1.057 5	1.298 5
0.01	0.005	7.038 6	7.373 4
0.01	0.010	2.923 3	2.968 4
0.005	0.005	20.172 6	19.900

6 结 论

计算结果表明，利用样条有限点法分析智能板结构，不仅精度高，而且计算简便。故利用样条有限点法分析智能结构是一种经济有效的新方法。这种方法对于厚板分析也适用。

参考文献：

[1] Reddy J N. A simple higher-order theory for laminated composite plates[J]. J. Appl. Mech. ,1984 ,51(4) :745 – 752.

[2] 秦荣. 智能结构力学 [M]. 北京：科学出版社，2005：84 – 85.

[3] 秦荣. 计算结构力学 [M]. 北京：科学出版社，2001：44 – 45.

[4] Heyliger P, Brook S. Free vibration of piezoelectric laminates in cylindrical bending [J]. Int. J. Solids Struct., 1995, 32 (20): 2945 – 2960.

Spline Finite Point Method for Piezoelectric Intellectual Plate Analysis

QIN Rong, ZHANG Yong-bing, LI Xiu-mei

(*College of Civil Engineering and Architecture*, *Guangxi University*, *Nanning* 530004, *China*)

Abstract: A new method named spline finite point method for analysis of piezoelectric intellectual plate is presented in the paper, which is based on higher-order shear deformation theory, intelligent constitutive relations, transient variational principle and spline dispersing. Compared with the finite element method, the deformation of the piezoelectric intellectual plate confirms the correctness and rationality. The calculation indicates that by utilizing the spline finte point method to carry on the analysis of the intellectual structure, the model is simple and the physics relation is very clear. The spline finite point method has great superiority to the finite element model.

Key words: higher-order shear deformation theory; spline finte point method; laminated piezoelectric plate