文章编号：1006－544X（2006）03－0129－04

关于亚纯函数唯一性问题

章启兵[1]，李进东[2]

（1. 桂林工学院 数理系，广西 桂林 541004；2. 成都理工大学 信息管理学院应用数学系，成都 610059）

摘 要：利用 Nevanlinna 值分布理论和亚纯函数唯一性理论，研究了涉及导数、微分多项式和亏值的亚纯函数唯一性问题．设 f,g 是非常数的亚纯函数，$\Theta(\infty,f)=\Theta(\infty,g)=1,\overline{E}(1,f^{(n)})=\overline{E}(1,g^{(n)})$，$\Theta(0,f)+\Theta(0,g)>2-1/(7n+11)$（$n$ 为非负整数），则 $f\equiv g$ 或 $f^{(n)}\cdot g^{(n)}\equiv 1$.

关键词：亚纯函数；亏值；唯一性

中图分类号：O174.52 **文献标识码**：A

1 引言及主要结果

设 f 和 g 是开平面内的 2 个非常数亚纯函数，a 为任一复数，若 $f-a$ 和 $g-a$ 的零点相同，且零点的重级也相同，则称 f 与 g 以 a 为 CM 公共值；若 $f-a$ 和 $g-a$ 的零点相同（忽略重级），则称 f 与 g 以 a 为 IM 公共值.

$$p=\prod_{i=0}^{S}(f^{(i)})^{n_i},F=\sum_{i=0}^{n}a_i(z)f^{a_{i0}}(f')^{a_{i1}}\cdots(f^{(k_i)})^{a_{ik_i}}.$$

分别称为 f 的微分单项式和微分多项式. $r=\sum_{i=0}^{S}n_i$，称为 p 的次数. $\lambda_i=a_{i0}+a_{i1}+\cdots+a_{ik_i}$，$\lambda=\max_i(\lambda_i)$，$a=\min_i\{\lambda_i\}$，$\lambda$ 称为 F 的次数. 如果 $\lambda=a$，则 F 称为 f 的齐次微分多项式. $\Gamma_i=a_{i0}+2a_{i1}+\cdots+(k_i+1)a_{ik_i}$，$\Gamma=\max_i\{\Gamma_i\}$，$\Gamma$ 称为 F 的权数.

本文采用 Nevanlinna 理论的常用记号和术语，如：$T(r,f)$，$m(r,f)$，$N(r,f)$，$\overline{N}(r,f)$，$s(r,f)$ 等[1,2].

把两函数的导函数具有的公共值和亏值混合起来考虑是亚纯函数唯一性理论研究的一个重要课题. 本文证明了下面两个定理.

定理 1 设 f,g 是非常数的亚纯函数，$\Theta(\infty,f)=\Theta(\infty,g)=1,\overline{E}(1,f^{(n)})=\overline{E}(1,g^{(n)})$，$\Theta(0,f)+\Theta(0,g)>2-1/(7n+11)$（$n$ 为非负整数），则 $f\equiv g$ 或 $f^{(n)}\cdot g^{(n)}\equiv 1$.

定理 2 设 f,g 是非常数的亚纯函数，$F(f)$，$G(g)$ 分别是 f 和 g 的常系数齐次微分多项式，$F=\sum_{i=0}^{n}a_if^{a_{i0}}(f')^{a_{i1}}\cdots(f^{(k_i)})^{a_{ik_i}}$，$G=\sum_{i=0}^{m}b_if^{b_{i0}}(f')^{b_{i1}}\cdots(f^{(l_i)})^{b_{il_i}}$，其次数分别是 λ_1,λ_2，权数分别是 Γ_1,Γ_2. 如果 $\Theta(\infty,f)=\Theta(\infty,g)=1$，$E(1,F)=E(1,G)$，$(\Gamma_1-\lambda_1+1)\Theta(0,f)+(\Gamma_2-\lambda_2+1)\Theta(0,g)>\sum_{i=1}^{2}(\Gamma_i-\lambda_i+1)-\min\{\lambda_1,\lambda_2\}/3$，则 $F\equiv G$ 或 $F\cdot G\equiv 1$.

推论 设 f,g 是非常数的亚纯函数，$\psi_n=a_n(d^n/dz^n)+a_{n-1}(d^{n-1}/dz^{n-1})+\cdots+a_1(d/dz)$（$a_n\neq 0$），为常系数线性微分算子，如果 $\Theta(\infty,f)=\Theta(\infty,g)=1$，$E(1,\psi_n(f))=E(1,\psi_n(g))$，$\Theta(0,f)+\Theta(0,g)>2-1/3(n+1)$. 则有

收稿日期：2005－05－29
基金项目：四川省教育厅自然科学基金资助项目（2004A104）
作者简介：章启兵（1969－），男，讲师，研究方向：亚纯函数值分布论.

(1) $f-g\equiv s$, s 是微分方程 $\psi_n(w)=0$ 的解,或

(2) $\psi_n(f)\cdot\psi_n(g)\equiv 1$.

2 一些引理

引理 1 设 f 是非常数的亚纯函数, n 是正整数,若 $\Theta(0,f)>1-1/n$. 则 $f^{(n)}$ 不为常数.

证明:若 $f^{(n)}$ 为常数,则 f 是至多 n 次的多项式,设 $f=\sum_{i=0}^{k}a_i f^i$, (k 为正整数, $k\leqslant n$, $a_k\neq 0$),则有 $T(r,f)=k\cdot\log r$,因为 k 次多项式有 k 个零点(记重数),故 ($\overline{n}(r,1/f)\geqslant 1$, 有 $\overline{N}(r,1/f)\geqslant\log r$. 所以 $\Theta(0,f)=1-\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\,\overline{N}(r,1/f)/T(r,f)\leqslant 1-\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\log r/(k\cdot\log r)=1-1/k\leqslant 1-1/n$ 矛盾. 所以 $f^{(n)}$ 不为常数.

引理 2 设 f 是非常数的亚纯函数, $F=F(f)=\sum_{i=0}^{n}a_i f^{a_{i0}}(f')^{a_{i1}}\cdots(f^{(k_i)})^{a_{ik_i}}$ 为 f 的常系数齐次微分多项式. 其次数是 λ,权数是 Γ,则有下面的不等式

$$\lambda T(r,f)\leqslant\overline{N}(r,f)+(\Gamma-\lambda+1)\overline{N}(r,1/f)+\overline{N}(r,1/(F-1)+s(r,f). \tag{1}$$

证明:由第 2 基本定理

$$T(r,F)\leqslant\overline{N}(r,F)+N(r,1/F)+\overline{N}(r,1/(F-1))-N(r,1/F',)+s(r,f). \tag{2}$$

其中 $N(r,1/F')$ 表示 F' 的零点,但不是 $F-1$ 的零点的计数函数.

由对数导数引理,有

$$m(r,1/f^{\lambda})\leqslant m(r,F/f^{\lambda})+m(r,1/F)+s(r,f)\leqslant m(r,1/F)+s(r,f). \tag{3}$$

所以,
$$\lambda T(r,f)-\lambda\cdot N(r,1/f)\leqslant T(r,F)-N(r,1/F)+s(r,f). \tag{4}$$

由(2),(4)得
$$\lambda T(r,f)\leqslant\overline{N}(r,F)+\lambda N(r,1/f)+\overline{N}(r,1/(F-1)-N(r,1/F')+s(r,f). \tag{5}$$

本文约定,用 $\langle x\rangle$ 表示不小于 x 的最小整数,不难得到:若 z_0 是 f 的大于或等于 $\langle(\Gamma-\lambda+k)/\lambda\rangle$(其中 k 为整数, $k\geqslant 1$) 级零点,则 z_0 必是 $F(f)$ 的至少 $\lambda\langle(\Gamma-\lambda+k)/\lambda\rangle-(\Gamma-\lambda)$ 级零点,是 $F'(f)$ 的至少 $\lambda\langle(\Gamma-\lambda+k)/\lambda\rangle-(\Gamma-\lambda+1)$ 级零点,从而有

$$\lambda N_{(\langle\frac{\Gamma-\lambda+1)}{\lambda}\rangle}(r,1/f)-N(r,1/F')\leqslant(\Gamma-\lambda+1)\overline{N}(r,1/f). \tag{6}$$

其中 $N_{(\langle\frac{\Gamma-\lambda+1)}{\lambda}\rangle}(r,1/f)$ 表示 f 的重级大于或等于 $\langle(\Gamma-\lambda+1)/\lambda\rangle$ 的零点的计数函数.

若 z_0 是 f 的小于或等于 $\langle(\Gamma-\lambda+1)/\lambda\rangle-1$ 级零点,因为 $\langle(\Gamma-\lambda+1)/\lambda\rangle-1\leqslant(\Gamma-\lambda+1)/\lambda$,所以

$$\lambda N_{\langle\frac{\Gamma-\lambda+1}{\lambda}\rangle-1)}(r,1/f)\leqslant(\Gamma-\lambda+1)\overline{N}(r,1/f). \tag{7}$$

其中 $N_{\langle\frac{\Gamma-\lambda+1}{\lambda}\rangle-1)}(r,1/f)$ 表示 f 的重级小于或等于 $\langle(\Gamma-\lambda+1)/\lambda\rangle-1$ 的零点的计数函数.

由(5),(6),(7)得

$$\lambda T(r,f)\leqslant\overline{N}(r,f)+(\Gamma-\lambda+1)\overline{N}(r,1/f)+\overline{N}(r,1/(F-1))+s(r,f).$$

引理 3 设 f, g 是非常数的亚纯函数, $F(f)$, $G(g)$ 分别是 f 和 g 的齐次微分多项式. 其次数分别是 λ_1, λ_2,权数分别是 Γ_1, Γ_2. 如果 $\Theta(\infty,f)=1$, $\overline{E}(1,F)=\overline{E}(1,G)$, $\Theta(0,f)>1-\lambda_1/(3(\Gamma_1-\lambda_1+1))$,则 $T(r,f)=O(T(r,F))$, $T(r,f)=O(T(r,G))$.

证明:由引理 2 及引理 3 的条件知

$$T(r,f)\leqslant(\Gamma_1-\lambda_1+1)\overline{N}(r,1/f)/\lambda_1+\overline{N}(r,1/(F-1))/\lambda_1+s(r,f).$$

由 $\Theta(0,f)>1-\lambda_1/(3(\Gamma_1-\lambda_1+1))$,得 $\overline{N}(r,1/f)<(\lambda_1 T(r,f)/(3(\Gamma_1-\lambda_1+1))$. 所以

$$T(r,f)\leqslant(3\overline{N}(r,1/(F-1))/(2\lambda_1)+s(r,f)\leqslant 3T(r,F)/(2\lambda_1)+s(r,f). \tag{8}$$

因为 $\overline{E}(1,F)=\overline{E}(1,G)$,所以

$$T(r,f)\leqslant 3\overline{N}(r,1/(G-1))/(2\lambda_1)+s(r,f)\leqslant 3T(r,G)/(2\lambda_1)+s(r,f). \tag{9}$$

由(8),(9)得: $T(r,f)=O(T(r,F))$, $T(r,f)=O(T(r,G))$.

引理 4[3]　设 $f_j(z)(j=1,2,3)$ 于开平面亚纯，且 $f_1(z)$ 不为常数，如果：$\sum_{j=1}^{3} f_j(z)\equiv 1$ 并满足 $\sum_{j=1}^{3}\overline{N}(r,1/f_j)+\sum_{j=1}^{3}\overline{N}(r,f_j)<(\lambda+o(1))T(r)(r\in I)$，其中 $\lambda<1/2$，$T(r)=\max_{1\leqslant j\leqslant 3}\{T(r,f_j)\}$. 则：$f_2(z)\equiv 1$，或 $f_3(z)\equiv 1$.

引理 5　设 f 是非常数的亚纯函数，$F=F(f)=\sum_{i=0}^{n} a_i(z)f^{a_{i0}}(f')^{a_{i1}}\cdots(f^{(k_i)})^{a_{ik_i}}$ 为 f 的常系数齐次微分多项式. 其次数是 λ，权数是 Γ，$\Theta(\infty,f)=1$. 则有

$$\overline{N}(r,1/F)\leqslant(\Gamma-\lambda+1)\overline{N}(r,1/f)+s(r,f).$$

证明：$\overline{N}(r,1/F)\leqslant\overline{N}(r,f^{\lambda}/F)+\overline{N}(r,1/f)\leqslant T(r,F/f^{\lambda})+\overline{N}(r,1/f)+s(r,f)\leqslant N(r,F/f^{\lambda})+\overline{N}(r,1/f)+s(r,f)$.　(10)

下面分两种情况：

(i) z_0 是 f 的大于或等于 $\langle(\Gamma-\lambda)/\lambda\rangle$ 级零点；

(ii) z_0 是 f 的小于或等于 $\langle(\Gamma-\lambda)/\lambda\rangle-1$ 级零点.

完全类似于引理 2 的证明，可以得到

$$\overline{N}(r,1/F)\leqslant(\Gamma-\lambda+1)\overline{N}(r,1/f)+s(r,f).$$

3　定理 1 的证明

设　$(f^{(n)}-1)/(g^{(n)}-1)\equiv h$，则 $f^{(n)}-hg^{(n)}+h\equiv 1$.　(11)

由引理 3 及条件知：$\overline{N}(r,h)+\overline{N}(r,1/h)\leqslant\overline{N}(r,1/f^{(n+1)})+\overline{N}(r,1/g^{(n+1)})+\overline{N}(r,f)+\overline{N}(r,g)\leqslant(n+2)(\overline{N}(r,1/f)+\overline{N}(r,1/g))+o(T(r))$，$(r\in I)$，其中 $T(r)=\max_{1\leqslant j\leqslant 3}\{T(r,f_j)\}$，$f_1=f^{(n)}$，$f_2=-hg^{(n)}$，$f_3=h$.

再由(11)得　$\sum_{j=1}^{3} f_j\equiv 1$.　(12)

$\sum_{j=1}^{3}\overline{N}(r,1/f_j)+\sum_{j=1}^{3}\overline{N}(r,f_j)\leqslant\overline{N}(r,1/f^{(n)})+\overline{N}(r,1/g^{(n)})+2(\overline{N}(r,h)+\overline{N}(r,1/h))+o(T(r))\leqslant(3n+5)(\overline{N}(r,1/f)+\overline{N}(r,1/g))+o(T(r))\leqslant(3n+5)(2-\Theta(0,f)-\Theta(0,g)+\varepsilon)\cdot\max\{T(r,f),T(r,g)\}$，其中 $0<\varepsilon<\Theta(0,f)+\Theta(0,g)-2+1/(7n+11)$.　(13)

由 Milloux[4] 不等式

$$T(r,f)<\overline{N}(r,f)+N(r,1/f)+N(r,1/(f^{(n)}-1))-\overline{N}(r,1/(f^{(n+1)}))+s(r,f);$$
$$T(r,f)<\overline{N}(r,f)+(n+1)\overline{N}(r,1/f)+\overline{N}(r,1/(f^{(n)}-1))+s(r,f).$$

从而有　$T(r,f)<\overline{N}(r,f)+(n+1)\overline{N}(r,1/f)+T(r,f^{(n)})+s(r,f)$.　(14)

由 $\Theta(0,f)>1-1/(7n+11)$，得　$\overline{N}(r,1/f)<T(r,f)/(7n+11)+s(r,f)$.　(15)

由(14)，(15)得　$T(r,f)<(7n+11)T(r,f^{(n)})/(6n+10)+s(r,f)$.　(16)

由 $\overline{E}(1,f^{(n)})=\overline{E}(1,g^{(n)})$，得：　$T(r,f)<(7n+11)T(r,g^{(n)})/(6n+10)+s(r,f)$.　(17)

同理　$T(r,g)<(7n+11)T(r,f^{(n)})/(6n+10)+s(r,f)$.　(18)

由(17)，(18)知

$\max\{T(r,f),T(r,g)\}\leqslant(7n+11)T(r,f^{(n)})/(6n+10)+s(r,f)\leqslant(7n+11)T(r)/(6n+10)+o(T(r))$.　(19)

由(13)，(19)得

$$\sum_{j=1}^{3}\overline{N}(r,1/f_j)+\sum_{j=1}^{3}\overline{N}(r,f_j)<(\mu+o(1))T(r),(\mu<1/2).\qquad(20)$$

由引理 1 及定理的条件知：$f^{(n)}$ 不为常数. 由(19)及引理 4 知：$-hg^{(n)}=1$ 或 $h=1$. 若 $-hg^{(n)}=1$，由(12)知：$f^{(n)}=-h$. 所以，$f^{(n)}\cdot g^{(n)}\equiv 1$.

若 $h=1$，则 $f^{(n)}\equiv g^{(n)}$，于是 $f=g+P(z)$，$P(z)$ 是一个次数至多为 $n-1$ 次的多项式. 假设 P 不恒等于零.

设 $T(r,g) \leqslant T(r,f)$，$(r \in I)$，由定理的条件易知：f,g 为超越亚纯函数，从而由推广的第二基本定理得：$T(r,f) \leqslant \overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,1/f) + \overline{N}(r,1/(f-P)) + s(r,f) \leqslant \overline{N}(r,1/f) + \overline{N}(r,1/g) + s(r,f) \leqslant (2 - \Theta(0,f) - \Theta(0,g) + \varepsilon)T(r,f)$，$r \in I$，其中 $0 < \varepsilon < \Theta(0,f) + \Theta(0,g) - 2 + 1/(7n+11)$. 导致 $T(r,f) = s(r,f)$，矛盾. 所以 P 恒等于零，从而 $f \equiv g$.

4 定理 2 的证明

设：$(F-1)/(G-1) \equiv h$，则 $F - hG + h \equiv 1$. 由引理 3 知，$\overline{N}(r,h) + \overline{N}(r,1/h) \leqslant \overline{N}(r,f) + \overline{N}(r,g) = o(T(r))$，$(r \in I)$，其中 $T(r) = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant 3}\{T(r,f_j)\}$，$f_1 = F$，$f_2 = -hG$，$f_3 = h$. 于是有

$$\sum_{j=1}^{3} f_j \equiv 1. \tag{21}$$

由引理 5 得

$$\sum_{j=1}^{3} \overline{N}(r,1/f_j) \leqslant \overline{N}(r,1/F) + \overline{N}(r,1/G) + o(T(r)) \leqslant (\Gamma_1 - \lambda_1 + 1)\overline{N}(r,1/f) + (\Gamma_2 - \lambda_2 + 1)\overline{N}(r,1/g) + o(T(r))$$
$$\leqslant [(\Gamma_1 - \lambda_1 + 1)(1 - \Theta(0,f)) + (\Gamma_2 - \lambda_2 + 1)(1 - \Theta(0,g))]\max\{T(r,f),T(r,g)\} + o(T(r)). \tag{22}$$

不妨假设 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. 由引理 2 及式(8)

$$\max\{T(r,f),T(r,g)\} \leqslant 3T(r,F)/(2\lambda_1) + o(T(r)) \leqslant (3/(2\lambda_1) + o(1))T(r).$$

所以：$\sum\limits_{j=1}^{3} \overline{N}(r,1/f_j) \leqslant [(\Gamma_1 - \lambda_1 + 1)(1 - \Theta(0,f)) + (\Gamma_2 - \lambda_2 + 1)(1 - \Theta(0,g))] \cdot (3/(2\lambda_1) + o(1))T(r) < (\mu + o(1))(T(r),(\mu < 1/2)$.

显然：$\sum\limits_{j=1}^{3} \overline{N}(r,f_j) = o(T(r))$.

由引理 3 知 F 不为常数，由引理 4 知 $-hG = 1$ 或 $h = 1$，从而有 $F \equiv G$ 或 $F \cdot G \equiv 1$.

参考文献：

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京：科学出版社，1982.

[2] 仪洪勋，杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京：科学出版社，1995.

[3] 吴桂荣. 关于亚纯函数的唯一性问题[J]. 数学杂志，2000，20(1)：49 - 54.

[4] 顾永兴. 亚纯函数的正规族[M]. 成都：四川教育出版社，1991.

Uniqueness of meromorphic function

ZHANG Qi-bing[1], LI Jin-dong[2]

(1. *Department of Mathematics and Physics*, *Guilin University of Technology*, *Guilin* 541004, *China*;
2. *Department of Applied Mathematics*, *Chengdu University of Technology*, *Chengdu* 610059, *China*)

Abstract: Applying the theory of Nevanlinna's value distribution and the uniqueness theory of meromorphic functions, the uniqueness of Meromorphic functions concerning derivative, differential polynomial and deficient value is studied. The main result is: Let f,g be two non-constant meromorphic functions, $\Theta(\infty,f) = \Theta(\infty,g) = 1$, $\overline{E}(1,f^{(n)}) = \overline{E}(1,g^{(n)})$, $\Theta(0,f) + \Theta(0,g) > 2 - 1/(7n+11)$ (n is nonnegative integer), then $f \equiv g$ or $f^{(n)} \cdot g^{(n)} \equiv 1$.

Key words: meromorphic function; deficient value; uniqueness