文章编号：1006－544X（2006）04－0583－03

# 不同分布 $\tilde{\varphi}$ 混合序列的强收敛性

邓光明，贾　贞
（桂林工学院 数理系，广西 桂林　541004）

**摘　要**：讨论了不同分布 $\tilde{\varphi}$ 混合序列的强收敛性，获得了与独立情形几乎一致的结果，推广了著名的 Kolmogrov 强大数律.

**关键词**：$\tilde{\varphi}$ 混合序列；强收敛；矩条件
**中图分类号**：O221.1　　**文献标志码**：A

## 1　引言及引理

设$\{X_i, i\in N\}$是概率空间$(\Omega,\beta,P)$上的随机变量序列,$F_S=\sigma(X_i, i\in S\subset N)$为$\sigma$-域,在$\beta$中给定$\sigma$-域$F,R$,令$\varphi(F,R)=\sup\{|P(B|A)-P(B)|;A\in F,P(A)>0,B\in R\}$,类似于文献[1],文献[2]引入如下的相依系数:对$k\geqslant 0$,令

$\tilde{\varphi}(k)=\sup\{\varphi(F_S,F_T)$,有限子集$S,T\subset N$,且$\operatorname{dist}(S,T)\geqslant k\}$.　(1)

其中,$\operatorname{dist}(S,T)$表示集合$S,T$的距离,显然,$0\leqslant\tilde{\varphi}(k+1)\leqslant\tilde{\varphi}(k)\leqslant 1$,且$\tilde{\varphi}(0)=1$.

**定义**　对随机序列$\{X_i, i\in N\}$,如存在$k\in N$,使$\tilde{\varphi}(k)<1$,则称$\{X_i, i\in N\}$是$\tilde{\varphi}$混合序列.

$\tilde{\varphi}$混合与通常的$\varphi$混合有一定的类似,但并不相同,它们互不包含,事实上,在通常的$\varphi$混合系数$\varphi(k)$中,式(1)的$S,T$分别是$[1,n]$和$[n+k,\infty]$中的子集.另外,$\tilde{\varphi}$混合只要求存在某$k\in N$,使$\tilde{\varphi}(k)<1$,在这一点上要比$\varphi$混合的要求$\varphi(n)\to 0,n\to\infty$弱得多,因此,$\tilde{\varphi}$混合是一类极为广泛的相依混合序列,对其进行研究是很有价值的,文献[2,3]研究了它的完全收敛性和强收敛性.本文进一步讨论它的强收敛性,所得结果几乎达到独立情形的Kolmogorov强大数律.

在极限性质的讨论中,对$\tilde{\varphi}$序列$\{X_i,\in N\}$,即存在$k_0\in N$,使$\tilde{\varphi}(k_0)<1$,如$k_0>1$,可考虑$\{X_i\}$的$k_0$个子列$\{X_{k_0 i+j}, i\in N\}$,$j=0,1,2,\cdots,k_0-1$,而每一个子列的$\tilde{\varphi}(1)$即为原序列的$\tilde{\varphi}(k_0)$,因此,对$\tilde{\varphi}$混合序列,可不失一般性,假设$\tilde{\varphi}(1)<1$.

**引理 1**[2]　设$\{X_i, i\in N\}$是$\tilde{\varphi}$混合序列,$\mathrm{E}X_i=0$,$\mathrm{E}|X_i|^2<\infty$,记$S_n=\sum_{i=1}^n X_i$,则存在仅依赖于$\tilde{\varphi}$的常数$c$,使对$\forall n\geqslant 1$有

$$\mathrm{E}S_n^2\leqslant c\sum_{i=1}^n \mathrm{E}X_i^2.$$

**引理 2**[4]　设$\{X_n, n\geqslant 1\}$是非负的随机变量序列,对任意$n\geqslant 1$,$\operatorname{Var}X_n<\infty$,$\{a_n, n\geqslant 1\}$是非降趋于无穷的正常数序列,满足

① $\sup_{n\geqslant 1} a_n^{-1}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}X_i<\infty$;

② 存在非负常数阵列$\{\rho_{ij}, i\geqslant 1, j\geqslant 1\}$,对每个$n\geqslant 1$,有$\operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)\leqslant\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\rho_{ij}$;

③ $\sum_{i=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty\rho_{ij}/a_{i\vee j}^2<\infty$,其中$i\vee j=\max(i,j)$;

则　$a_n^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i-\mathrm{E}X_i)\to 0$, a. s.

## 2　定理及其证明

**定理 1**　设$\{X_i, i\in N\}$是$\tilde{\varphi}$混合序列,对任意$n\geqslant 1$,方差$\operatorname{Var}X_n<\infty$,$\{a_n, n\geqslant 1\}$是非降趋于无穷的正常数序列,假设

**收稿日期**：2006－04－03
**基金项目**：广西高校百名中青年学科带头人资助计划项目（桂教人［2005］64）
**作者简介**：邓光明（1965－），男，副教授，研究方向：极限理论和应用统计. E-mail：dgm@glite.edu.cn

$$\sup_{n\geqslant 1} a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\,|X_i-\mathrm{E}X_i|<\infty, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Var}\,X_n/a_n^2<\infty. \tag{3}$$

则 $a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathrm{E}X_i)\to 0$, a. s.

**定理 2** 设 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 是 $\tilde{\varphi}$ 混合序列，$\{a_n, n\geqslant 1\}$ 是非降趋于无穷的正常数序列，满足下列条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|X_n|>a_n<\infty, \tag{4}$$

$$a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}X_iI_{(|X_i|>a_i)}\to 0, \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{-2}\mathrm{Var}\,X_nI_{(|X_n|\leqslant a_n)}<\infty, \tag{6}$$

$$\sup_{n\geqslant 1}a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\,|X_i|\,I_{(|X_i|>a_i)}<\infty. \tag{7}$$

则 $a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathrm{E}X_i)\to 0$, a. s.

**定理 1 的证明：** 记 $X^+$ 和 $X^-$ 分别为 $X$ 的正部和负部，有 $X^{\pm}\geqslant 0$, $X=X^+-X^-$, $|X|=X^++X^-$，由

$$a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathrm{E}X_i)=a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathrm{E}X_i)^+-a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathrm{E}X_i)^-$$

$$=a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}((X_i-\mathrm{E}X_i)^+-\mathrm{E}(X_i-\mathrm{E}X_i)^+)-a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}((X_i-\mathrm{E}X_i)^--\mathrm{E}(X_i-\mathrm{E}X_i)^-).$$

要证定理 1，只需证明

$$a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}((X_i-\mathrm{E}X_i)^{\pm}-\mathrm{E}(X_i-\mathrm{E}X_i)^{\pm})\to 0,\ \text{a. s.}$$

由 $\mathrm{Var}(X_i-\mathrm{E}X_i)^+\leqslant\mathrm{E}((X_i-\mathrm{E}X_i)^+)^2\leqslant\mathrm{E}(X_i-\mathrm{E}X_i)^2=\mathrm{Var}X_i<\infty$, (8)

又 $\mathrm{E}\,|(X_i-\mathrm{E}X_i)^+-\mathrm{E}(X_i-\mathrm{E}X_i)^+|\leqslant 2\mathrm{E}(X_i-\mathrm{E}X_i)^+\leqslant 2\mathrm{E}\,|X_i-\mathrm{E}X_i|$.

由式(2) 得

$$\sup_{n\geqslant 1}a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\,|(X_i-\mathrm{E}X_i)^+-\mathrm{E}(X_i-\mathrm{E}X_i)^+|<\infty, \tag{9}$$

又由引理 1 得

$$\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{n}((X_k-\mathrm{E}X_k)^+)=\mathrm{E}(\sum_{k=1}^{n}((X_k-\mathrm{E}X_k)^+)^2-(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(X_k-\mathrm{E}X_k)^+)^2$$

$$=\mathrm{E}(\sum_{k=1}^{n}((X_k-\mathrm{E}X_k)^+-\mathrm{E}(X_k-\mathrm{E}X_k)^+))^2$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}((X_k-\mathrm{E}X_k)^+-\mathrm{E}(X_k-\mathrm{E}X_k)^+)^2$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}((X_k-\mathrm{E}X_k)^+)^2$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}(X_k-\mathrm{E}X_k)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}\,X_k. \tag{10}$$

取 $\rho_{ij}=\begin{cases}\mathrm{Var}\,X_i, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$

则由式(10) 有

$$\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^{n}(X_k-\mathrm{E}X_k)^+)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\rho_{ij}.$$

且由式(3) 得

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\rho_{ij}/a_{i\vee j}^2=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mathrm{Var}\,X_i}{a_i^2}<\infty. \tag{11}$$

综合式(8)、(9)、(11)，由引理 2 即得

$$a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}((X_i-\mathrm{E}X_i)^+-\mathrm{E}(X_i-\mathrm{E}X_i)^+)\to 0,\ \text{a. s.}$$

同理可证

$$a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}((X_i-\mathrm{E}X_i)^--\mathrm{E}(X_i-\mathrm{E}X_i)^-)\to 0,\ \text{a. s.}$$

故 $a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathrm{E}X_i)\to 0$, a. s.

定理 1 证毕.

**定理 2 的证明：** 对 $X_i$ 截尾，记 $Y_i=X_iI_{(|X_i|\leqslant a_i)}$，则

$$a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mathrm{E}X_i)=a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)+a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mathrm{E}Y_i)+a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{E}Y_i-\mathrm{E}X_i)\stackrel{\wedge}{=}I_1+I_2+I_3.$$

故要证定理 2，只需证明：$I_i\to 0$, a. s. $i=1,2$, $I_3\to 0$.

由式(4) 得

$$\sum_{i=1}^{\infty}P(X_i\neq Y_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(|X_i|>a_i)<\infty,$$

所以由 Borel-Cantelli 引理得 $P(X_i\neq Y_i,\text{i. o.})=0$.

又由 $a_n^{-1}\to 0$, $n\to\infty$，得

$$P(\lim_{n\to\infty}a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-Y_i)=0,\text{i. o.})=1,$$

即 $I_1\to 0$, a. s.

下面验证 $\{Y_i, i\geqslant 1\}$ 满足定理 1 的条件，

由 $Y_i$ 的定义得 $\mathrm{Var}\,Y_i\leqslant a_i^2<\infty$,

又由式(7) 得

$$\sup_{n\geqslant 1}a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\,|Y_i-\mathrm{E}Y_i|\leqslant 2\sup_{n\geqslant 1}a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\,|Y_i|$$

$$= 2\sup_{n\geqslant 1} a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\,|\,X_i\,|\,I_{(|X_i|\leqslant a_i)} < \infty,$$

再由式(6) 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2}\mathrm{Var}\ Y_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-2}\mathrm{Var}\ X_n I_{(|X_n|\leqslant a_n)} < \infty.$$

故$\{Y_i, i\geqslant 1\}$ 满足定理 1 的条件,由定理 1 得

$$I_2 \to 0, \text{a. s.}$$

最后证明 $I_3 \to 0$,由式(5) 即得

$$I_3 = a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i - Y_i) = a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}X_i I_{(|X_i|>a_i)} \to 0.$$

综合即得

$$a_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathrm{E}X_i) \to 0, \text{a. s.}$$

定理 2 证毕.

## 参考文献:

[1] Bryc W, Smolenski W. Moment conditions for almost sure convergence of weakly correlated random variables [J]. Proceeding of American Math Society, 1993, 119 (2): 629 - 635.

[2] 吴群英, 林亮. $\tilde{\varphi}$ 混合序列的完全收敛性和强收敛性 [J]. 工程数学学报, 2004, 21 (1): 75 - 80.

[3] 何宝珠. $\tilde{\varphi}$ 混合序列的几乎处处收敛速度 [J]. 桂林工学院学报, 2005, 25 (2): 256 - 258.

[4] Chandra T K, Goswami A. Cesaro uniform integrability and the strong law of number [J]. Sankhya, 1992, 54 (2): 215 - 231.

[5] 林正炎, 陆传荣, 苏中根. 概率极限理论基础 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.

# Strong convergence for $\tilde{\varphi}$ mixing random sequences with different distributions

DENG Guang-ming, JIA Zhen

(*Department of Maths and Physics*, *Guilin University of Technology*, *Guilin* 541004, *China*)

**Abstract**: The strong convergence for $\tilde{\varphi}$ mixing random sequences with different distribution is introduced. The results are almost consistent with those of independent sequences. The well-known Kolmogorov strong law of large numbers is further improved.

**Key words**: $\tilde{\varphi}$ mixing random sequence; strong convergence; moment condition