文章编号:1006-544X(2004)01-0111-02

一种恰当微分方程的解法

杨 立

(桂林工学院 数理系,广西 桂林 541004)

摘 要:对一种恰当方程的求解问题进行了探讨,提出一种积分恰当方程的小窍门——积分对比法. 主要运用积分和等式求解的相关知识来综合考虑恰当方程的求解问题,此种解法和其它解决此类问题的方法相比较,更简单、明了,使学生易于轻松接受新知识,达到快速求解恰当方程的目的,推广了现有文献的结果.

关键词:恰当方程;解法;积分对比法

中图分类号:O175.1 **文献标识码**:A①

0 引 言

从现有文献来看,一般情况下,恰当方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}x = 0 \qquad (1)$$

的解法不外乎观察法、线积分法、分项组合法等. 本文以此为基础探讨一种更简便的方法 —— 积分对比法.

定义1[1]:如果方程(1)的左端恰好是某个二元函数 $U(x,y)$ 的全微分,即

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}U(x,y), \quad 或$$

$$M(x,y)\mathrm{d}x + N(x,y)\mathrm{d}y = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

则称(1)为恰当方程.

定义2:如果一个函数可以表示成2个带积分的表达式,则可通过对比法互相确定出这2个表达式的未知函数,从而确定出这个函数,把这种求函数表达式的方法称为积分对比法.

1 积分对比法

给定恰当方程(1),根据恰当方程的定义有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = M, \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = N. \end{cases}$$

在这个方程组中为了求解 $U(x,y)$,先把 $U(x,y)$ 用积分形式表示出来

$$\begin{cases} U(x,y) = \int M\mathrm{d}x + \varphi(y), & (2) \\ U(x,y) = \int N\mathrm{d}y + \varphi(x), & (3) \end{cases}$$

(其中 $\varphi(x)$ 只与 x 有关,$\varphi(y)$ 只与 y 有关).

所以可以利用(2),(3)两式的右边相等,即

$$\int M\mathrm{d}x + \varphi(y) = \int N\mathrm{d}y + \varphi(x)$$

来确定 $\varphi(x)$,$\varphi(y)$. 由等式的性质便可得 $\varphi(x)$,$\varphi(y)$ 的表达式,然后把 $\varphi(x)$ 带入(3),或者把 $\varphi(y)$ 带入(2),便可得 $U(x,y)$ 的表达式,从而恰当方程(1)的通解为 $U(x,y) = C$(C 为任意常数).

2 应用举例

例:求方程

$(\mathrm{e}^{x+y} + \cos(x+y) + 3x^2 + 6xy^2)\mathrm{d}x + (\cos(x+y) + 6x^2y + 4y^3 + \mathrm{e}^{x+y})\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

解:

方法1(一般方法):

这里

$$M = \mathrm{e}^{x+y} + \cos(x+y) + 3x^2 + 6xy^2,$$

$$N = \cos(x+y) + 6x^2y + 4y^3 + \mathrm{e}^{x+y},$$

① **收稿日期**:2003-01-09

作者简介:杨 立(1979-),女,助教,数学与应用数学专业.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^{x+y} - \sin(x+y) + 12xy,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\sin(x+y) + 12xy + e^{x+y}.$$

因此原方程为恰当方程.

现在求 U,使它同时满足如下 2 个方程:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{x+y} + \cos(x+y) + 3x^2 + 6xy^2, \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \cos(x+y) + 6x^2y + 4y^3 + e^{x+y}. \quad (5)$$

微分(4) 可得

$$U = e^{x+y} + \sin(x+y) + x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y). \quad (6)$$

为了确定 $\varphi(y)$,将(6) 式对 y 求导,并使它满足(5),即得

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^{x+y} + \cos(x+y) + 6x^2y + \frac{d\varphi(y)}{dy}$$
$$= \cos(x+y) + 6x^2y + 4y^3 + e^{x+y}.$$

积分可得 $\varphi(y) = y^4$.

所以把 $\varphi(y)$ 带入(6) 式,有

$$U = e^{x+y} + \sin(x+y) + x^3 + 3x^2y^2 + y^4.$$

因此原方程的通解为

$e^{x+y} + \sin(x+y) + x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$($C$ 为任意常数).

方法 2(积分对比法):

由方法 1 的判断知此方程为恰当方程,所以直接求 U. 满足

$$\begin{cases} U = \int M dx + \varphi(y) = \int (e^{x+y} + \cos(x+y) + 3x^2 + 6xy^2) dx + \varphi(y), \\ U = \int N dy + \varphi(x) = \int (\cos(x+y) + 6x^2y + 4y^3 + e^{x+y}) dy + \varphi(x). \end{cases} \quad (7)$$

因方程的右端相等,整理得

$$e^{x+y} + \sin(x+y) + x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$$
$$= \sin(x+y) + 3xy + y^4 + e^{x+y} + \varphi(x),$$

因为 $\varphi(x)$ 只与 x 有关,$\varphi(y)$ 只与 y 有关,所以

$$\varphi(x) = x^3, \quad \varphi(y) = y^4.$$

把 $\varphi(x)$ 带入(7) 式,有

$$U = e^{x+y} + \sin(x+y) + x^3 + 3x^2y^2 + y^4.$$

故原方程的通解为

$e^{x+y} + \sin(x+y) + x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$($C$ 为任意常数).

3 结 论

通过上面 2 种方法的对比,可以看出,方法 1 主要应用了一次积分,一次求导,再一次积分的方法;而方法 2 只需通过一次积分,一次等式对比便可得到相应的结果,所以方法 2 在思维方式上向前跳跃了很大一步,简捷、明了、直观. 特别对初学者来说,无疑是一种简便、可行的好方法.

参考文献

[1] 王高雄,周之铭,朱思铭,等. 常微分方程(第 2 版)[M]. 北京:高等教育出版社,1983. 39 - 43.

An appropriate differential equation solution

YANG Li

(*Department of Maths and Physics*, *Guilin Institute of Technology*, *Guilin* 541004, *China*)

Abstract: In this paper the solution of an appropriate differential equations is introduced. A new kind of solution to this equation is put forward, which is an integral equation and comparision with the knowledge that integral equation is applied to this solution. Compared with other methods, this method is found to be more simple so that students can understand new knowledge more easily and this problem can be resolved quickly.

Key words: appropriate differential equation; solution; the method of integral equation and comparision