第24卷　第4期　　桂 林 工 学 院 学 报　　Vol. 24　No. 4
2004 年 10 月　　JOURNAL OF GUILIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY　　Oct.　2004

文章编号:1006－544X(2004)04－0512－04

关于图的(g, f)－因子分解的若干结果

李继猛[1]，李建湘[2]，杨喜陶[2]

（1. 邵阳学院 数学系，湖南 邵阳　422004；2. 湖南科技大学 数学院，湖南 湘潭　411201）

摘　要: 对目前关于图的因子分解研究中的3个问题进行了讨论,得到了以下结果:(1) 设 $Z = \{x \in V(G): d_G(x) - mg(x) \leq t(x)$, 或 $mf(x) - d_G(x) \leq t(x); t(x) = f(x) - g(x) > 0\}$. 当 $Z \neq \varnothing$ 时,g 和 f 可以不全为偶数,能使(mg, mf)－图有(g, f)－因子分解. (2) G 是具有 $2n$ 个顶点的 m－正则图,$m \geq n$. 若$(P_1, P_2, \cdots, P_r)$是 m 的一个划分,则 G 的边集 $E(G)$ 能划分成 r 个部分 $E_1, E_2, \cdots, E_r$,使 $G[E_i]$ 是 G 的 P_i－因子,其中 $P_i \equiv 0 \pmod 2$, $i = 2, \cdots, r$; $P_1 \equiv m \pmod 2$. (3) G 是具有 $2n$ 个顶点的 m－正则图,$m \geq n$. 若 G 不含有 K_3,则 G 有1－因子分解.

关键词: 图；因子；因子分解

中图分类号: O157.5　　**文献标识码:** A①

0　引　言

本文所考虑的均是有限无向简单图,分别用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 表示图 G 的顶点集和边集. 设 g 和 f 是定义在 $V(G)$ 上的整值函数,且对每个 $x \in V(G)$ 有 $g(x) \leq f(x)$. 图 G 的一个(g, f)－因子是 G 的一个支撑子图 F,使得对每个 $x \in V(G)$,有 $g(x) \leq d_F(x) \leq f(x)$. 特别地,若 G 本身是一个(g, f)－因子,则称 G 是一个(g, f)－图. 若对每个 $x \in V(G)$,使得 $g(x) = a$, $f(x) = b$,则 G 的(g, f)－因子被称为 G 的$[a, b]$－因子. 特别是 $a = b = r$,$[a, b]$－因子称为 r－因子. 若图 G 的边集 $E(G)$ 能划分为 m 个边不相交的(g, f)－因子 $F_1, F_2, \cdots, F_m$,则称 $F = \{F_1, F_2, \cdots F_m\}$ 是 G 的(g, f)－因子分解. $d_G(x)$ 表示点 x 在 G 中的次数,$G[S]$ 表示 G 的由 S 导出的子图,其中 $S \subseteq V(G)$,或 $S \subseteq E(G)$,$G[V(G)/S]$ 简记为 $G-S$. 记 $d_G(S) = \sum_{x \in S} d_G(x)$, $f(S) = \sum_{x \in S} f(x)$,并令 $f(\varnothing) = 0$. 其他未定义的记号见文献[1].

关于图的因子分解，一直是图论中较为困难的问题，比如一个图什么时候有1－因子分解，至今没有解决，只对某些图给出了充分必要条件. 文献［2］对图的因子分解问题进行了综述，同时提供了在该领域里进一步研究的3个问题.

问题1　设 G 是具有 $2n$ 个顶点的 d－正则图,若 $d \geq n$,G 是否有1－因子分解?

问题2　设 G 是具有 $2n$ 个顶点的 d－正则图,$(P_1, P_2, \cdots, P_r)$ 是 d 的一个划分,如果 $d \geq n$,$E(G)$ 是否能划分为 r 个部分 $E_1, E_2, \cdots, E_r$,使 $G[E_i]$ 是 G 的 P_i－因子?

问题3　若图 G 不是二分图,g 和 f 不全为偶数. 问在什么情况下一个(mg, mf)－图有(g, f)－因子分解?

本文肯定地回答了问题3，部分地解答了问题1和2，现用定理表述如下.

定理1　设有 m 为正整数,G 是一个(mg, mf)－图. 令 $t(x) = f(x) - g(x)$,若对 $x \in V(G)$:

(1) $t(x) > 0$, 且 $mf(x) - d_G(x) \leq t(x)$,有 $f(x)$ 为偶数;

(2) $t(x) > 0$, 且 $d_G(x) - mg(x) \leq t(x)$,有 $g(x)$ 为偶数;

(3) 否则,$f(x)$ 和 $g(x)$ 同为偶数.

①　**收稿日期:** 2003－06－30

基金项目: 湖南省教育厅科研基金资助项目（03C496）

作者简介: 李继猛（1964－），男，讲师，研究方向：图的因子与因子分解.

则 G 有 (g,f) - 因子分解.

定理 2　设 G 是具有 $2n$ 个顶点的 d - 正则图，$d \geq n$，$(P_1, P_2, \cdots, P_r)$ 是 d 的一个分划，其中 $P_1 \equiv d \pmod 2$，$P_i \equiv 0 \pmod 2$，$i = 2,3,\cdots,r$，那么 G 的边集 $E(G)$ 能划分成 r 个部分 $E_1, E_2, \cdots, E_r$，使 $G[E_i]$ 是 G 的 P_i - 因子.

定理 3　设 G 是具有 $2n$ 个顶点的 d - 正则图，$d \geq n$，若 G 不含有 K_3，则 G 有 1 - 因子分解.

由于问题 1 蕴含着问题 2，因此定理 3 还有定理 2 的表述形式，并且对 d 的任一分划 $(P_1, P_2, \cdots, P_r)$ 均成立.

为了定理证明的需要，这里引入几个引理.

引理 1[3]　设 G 是一个图，设 g 和 f 是定义在 $V(G)$ 上的两个非负整数值函数，使 $g(x) \leq f(x)$ 对每个顶点 $x \in V(G)$ 成立，则图 G 有 (g,f) - 因子，当且仅当对 $V(G)$ 的所有不相交的子集 S 和 T 有 $\delta_G(S, T) = f(S) + d_{G-S}(T) - g(T) - h_G(S,T) \geq 0$. 其中 $h_G(S,T)$ 表示 $G - (S \cup T)$ 中满足下列条件的分支数：分支 C 满足对每个 $x \in V(C)$，有 $g(x) = f(x)$ 且 $e_G(T, V(C)) + f(V(C)) \equiv 1 \pmod 2$. 这里 $e_G(T, V(C))$ 表示在 G 中连接 T 和 $V(C)$ 的边数. 这种分支称为 $G - (S \cup T)$ 的奇分支.

引理 2[4]　若图 G 有 p 个顶点，且 $\delta(G) \geq [p/2]$，则 $\lambda(G) = \delta(G)$，其中 $\delta(G)$ 表示图 G 中顶点的最小次数，$\lambda(G)$ 表示图 G 的边连通度.

引理 3[5]　图 G 有 2 - 因子分解当且仅当 G 是 $2d$ - 正则图.

1　定理 1 的证明

设 G 是一个 (mg, mf) - 图，且满足定理的条件. 对每个 $x \in V(G)$，定义

$$p(x) = \max\{g(x),\ d_G(x) - (m-1)f(x)\},$$
$$q(x) = \min\{f(x),\ d_G(x) - (m-1)g(x)\}.$$

容易证明，当 $m \geq 1$ 时，有

$$g(x) \leq p(x) \leq q(x) \leq f(x); \tag{1.1}$$
$$mg(x) \leq mp(x) \leq d_G(x) \leq mq(x) \leq mf(x). \tag{1.2}$$

先证明下面断言.

断言 1　当 $m \geq 2$，对每个 $x \in V(G)$，若 $p(x) = q(x)$，则 $p(x) = q(x)$ 为偶数.

证　设 $p(x) = q(x)$. 若此时 $f(x) = g(x)$，由定条件(1.1)可知，$g(x) = p(x) = q(x) = f(x)$ 为偶数，故以下假定 $g(x) < f(x)$.

若 $p(x) = g(x)$，则 $q(x) = p(x) = g(x) < f(x)$，由 $q(x)$ 的定义知

$$q(x) = d_G(x) - (m-1)g(x),$$

即　$d_G(x) - mg(x) = 0 \leq t(x)$，

故 $q(x) = p(x) = g(x)$ 为偶数.

若 $p(x) > g(x)$，则有 $p(x) = q(x) = f(x)$. 若不然，有 $q(x) < f(x)$，由 $p(x)$ 和 $q(x)$ 的定义知

$$p(x) = q(x) = d_G(x) - (m-1)g(x)$$

及　$p(x) = q(x) = d_G(x) - (m-1)f(x)$.

因 $m \geq 2$，由此推出 $g(x) = f(x)$，与 $g(x) < f(x)$ 矛盾. 因此必有 $p(x) = q(x) = f(x)$. 由 $p(x)$ 的定义知

$$f(x) = p(x) = d_G(x) - (m-1)f(x),$$

即　$mf(x) - d_G(x) = 0 \leq t(x)$.

故 $p(x) = q(x) = f(x)$ 为偶数，证毕.

下面对 m 用数学归纳证明 G 有 (g,f) - 因子分解. 当 $m = 1$ 时，定理显然成立. 假定定理对较小的 m 成立，下面证明当 $m \geqslant 2$ 时定理也成立.

先证明 G 有一个 (p,q) - 因子.

任取 $V(G)$ 的不相交子集 S 和 T. 由引理 1，只需证明 $\delta_G(S,T) = q(S) + d_{G-S}(T) - P(T) - h_G(S, T) \geq 0$. 当 $S \cup T = \varnothing$，由断言 1 可知 $h_G(\varnothing, \varnothing) = 0$，从而 $\delta_G(\varnothing, \varnothing) = 0$. 当 $S \cup T \neq \varnothing$ 时，设 $C_1, C_2, \cdots, C_l$ $(l = h_G(S,T))$ 是 $G - (S \cup T)$ 的奇分支，对每一个分支 C_i，根据断言 1 以及式(1.2)，有

$$q(V(C_i)) + e_G(V(C_i), T) \equiv 1 \pmod 2; \tag{1.3}$$
$$e_G(V(C_i),T) + e_G(V(C_i),S) = e_G(V(C_i), S \cup T) = d_G(V(C_i)) - d_{ci}(V(C_i)) = 0 \pmod 2. \tag{1.4}$$

从 (1.3) 和 (1.4) 可知 $e_G(V(C_i),T) \equiv e_G(V(C_i),S) \equiv 1 \pmod 2$，从而 $e_G(V(C_i),T) \geq 1$，$e_G(V(C_i),S) \geq 1$. 于是有

$$d_G(S) \geq h_G(S,T) + e_G(S,T),$$
$$d_G(T) \geq h_G(S,T) + e_G(S,T).$$

从而

$$\begin{aligned}
\delta(S,T) &= q(S) + d_{G-S}(T) - p(T) - h_G(S,T) \\
&= q(S) + d_G(T) - e_G(S,T) - h_G(S,T) - p(T) \\
&= q(S) - \frac{1}{m}(e_G(S,T) + h_G(S,T)) - \\
&\quad (1 - \frac{1}{m})(e_G(S,T) + h_G(S,T)) + d_G(T) - p(T) \\
&\geq q(S) - \frac{1}{m}d_G(S) - (1 - \frac{1}{m})d_G(T) + d_G(T) - p(T)
\end{aligned}$$

$= \frac{1}{m}(mq(S) - d_G(S)) + \frac{1}{m}(d_G(T) - mp(T)) \geq 0.$

由引理 1 可知 G 有一个 (p, q) – 因子 F,令 $G' = G - E(F)$,易知 G' 是一个 $((m-1)g, (m-1)f)$ – 图,显然 (p, q) – 因子是 (g, f) – 因子.

其次证明 G' 仍满足定理的条件,任取 $x \in V(G') = V(G)$,若是在 G 中有 $mf(x) - d_G(x) \leq t(x)$,因有 $d_{G'}(x) = d_G(x) - d_F(x) \geq d_G(x) - f(x)$,从而有 $(m-1)f(x) - d_{G'}(x) \leq mf(x) - d_G(x) \leq t(x)$. 若在 G 中 $d_G(x) - mg(x) \leq t(x)$,因 $d_{G'}(x) = d_G(x) - d_F(x) \leq d_G(x) - g(x)$,从而有 $d_G(x) - (m-1)g(x) \leq d_G(x) - mg(x) \leq t(x)$. 对于其他顶点 x,因在 G 中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 同为偶数,故 G' 仍符合定理的条件.

由归纳假设 G' 有 (g, f) – 因子分解,从而 G 有 (g, f) – 因子分解.

2 定理 2 的证明

先证明下面的引理.

引理 4 设 G 是具有 $2n$ 个顶点的 d – 正则图,若 $d \geq n$,则 G 必有 r – 因子,$1 \leq r \leq d$.

证 因 G 本身是 d – 因子,故以下假设 $1 \leq r < d$. 任取 $V(G)$ 的不相交子集 S 和 T. 由引理 1,只需证明 $\delta_G(S,T) = r|S| + d_{G-S}(T) - r|T| - h_G(S,T) \geq 0$,当 $S \cup T = \varnothing$ 时,若 r 为偶数,则 $h_G(\varnothing,\varnothing) = 0$,从而 $\delta_G(\varnothing,\varnothing) = 0$. 若 r 为奇数,因 $d \geq n$,故 G 是一连通图,从而有 $r|V(G)| = 2n$ 为偶数,仍有 $h_G(\varnothing,\varnothing) = 0$,从而也有 $\delta_G(\varnothing,\varnothing) = 0$. 设 $S \cup T \neq \varnothing$. 设 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ $(m = h_G(S,T))$ 是 $G - (S \cup T)$ 的奇分支,则有如下的断言.

断言 2 对每个奇分支 C_i,均有 $re_G(S, V(C_i)) + (d - r)e_G(T, V(C_i)) \geq d$.

证 因 G 连通,且由引理 2 可知 $e_G(V(C_i), S) + e_G(V(C_i), T) \geq d$,从而

$e_G(V(C_i), S) + (d - r)e_G(V(C_i), T) \geq e_G(V(C_i), S) + e_G(V(C_i), T) \geq d.$

由断言 2,有

$$\delta_G(S,T) = r|S| + d_{G-S}(T) - r|T| - h_G(S,T)$$

$$= r|S| + d(1 - \frac{r}{d})|T| - e_G(S,T) - m$$

$$= \sum_{s \in S} d_G(s)\frac{r}{d} + \sum_{t \in T} d_G(t)(1 - \frac{r}{d}) - \sum_{s \in S}\sum_{t \in T} e_G(s,t) - m$$

$$\geq \sum_s \sum_t e_G(s,t)\frac{r}{d} + \sum_s \sum_t e_G(s,t)(1 - \frac{r}{d}) - \sum_s \sum_t e_G(s,t) + \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_s e_G(s, V(C_i))\frac{r}{d} + \sum_t e_G(t, V(C_i))(1 - \frac{r}{d}) - 1\Big)$$

$$\geq \sum_s \sum_t e_G(s,t)\Big(\frac{r}{d} + (1 - \frac{r}{d}) - 1\Big) + \sum_{i=1}^{m}\Big[\frac{1}{d}(re_G(S, V(C_i)) + (d - r)e_G(T, V(C_i))) - 1\Big] \geq 0.$$

证毕.

从引理 4 和引理 3 可很容易得到定理 2. 由引理 4,可知定理 2 的图 G 有 P_1 – 因子 F_1,而 $G - E(F_1)$ 是 $(d - P_1)$ – 正则图. 又 $d - P_1$ 为偶数,由引理 3 可知 $G - E(F_1)$ 具有 2 – 因子分解,定理 2 成立.

3 定理 3 的证明

先给出下面的引理.

引理 5 设 G 是具有 $2n$ 个顶点的 d – 正则图,若 $d = n$,且 G 不含 K_3,则 G 有 1 – 因子分解.

证 对 n 用数学归纳法. 当 $n = 1, 2$ 时,定理显然成立. 假设定理对较小的 n 也成立. 下面证明对 $n \geq 3$ 定理也成立.

任取 $uv \in E(G)$,记 $G' = G - \{u, v\}$. 因在 G 中,u 要与 G' 中的 $n - 1$ 个点 $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$ 相邻,而 v 要与 G' 中的 $n - 1$ 个点 $y_1, y_2, \cdots y_{n-1}$ 相邻,又 G 不含 K_3,故 $x_i \neq y_j$, $i, j = 1, 2, \cdots, n - 1$. 从而 G' 是一个具有 $2(n - 1)$ 个顶点的 $(d - 1)$ – 正则图. 由归纳假设,G' 有 1 – 因子分解. 记 $F' = \{F'_1, F'_2, \cdots, F'_{n-1}\}$ 为 G' 的 1 – 因子分解. 对每个 i,F'_i 是 G' 的 1 – 因子,又 G 不含 K_3,故 u 必与 $E(F'_i)$ 中的每条边相关联. 同理,v 必与 $E(F'_i)$ 中的每条边相关联. 因此对每边 $x_i y_j \in E(F'_i)$,均有 $ux_i, uy_j \in E(G)$,$1 \leq i \leq n - 1$. 令

$$F_n = \{uv, x_1 y_{j1}, x_2 y_{j2}, \cdots, x_{n-1} y_{jn-1}\},$$

由刚才的讨论易知,F_n 是 G 的一个 1 – 因子. 再令 $F_i = (F'_i \{x_i y_{ji}\}) \cup \{ux_i, uy_{ji}\}$,$i = 1, 2, \cdots, n - 1$,显然 F_i 也是 G 的一个 1 – 因子,并且 $F = \{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$ 恰是 G 的一个 1 – 因子分解.

由归纳法原理,引理 5 成立. 证毕.

现在证明定理 3. 设 G 是具有 $2n$ 个顶点的 d – 正则图,$d \geq n$,且 G 不含 K_3. 对 d 用数学归纳法. 当

$d = n$ 时,由引理 5 定理成立. 假设定理对 l - 正则图均成立,$d > l \geq n$. 现在考虑图 G. 由引理 4 知,G 必有 1 - 因子 F,而 $G - E(F)$ 是$(d-1)$ - 正则图,$d - 1 \geq n$,且 $G - E(F)$ 不含 K_3,由归纳假设 $G - E(F)$ 有 1 - 因子分解,从而 G 有 1 - 因子分解.

参考文献

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications [M]. London: Macmillan, 1976.

[2] 刘桂真，张兰菊. 图的因子和因子分解的若干进展 [J]. 数学进展，2000，(4)：289 - 296.

[3] Lovasz L. Subgraphs with prescribed valencies [J]. J. Combin. Theory, 1970, (8): 392 - 416.

[4] Chartrand G. A graph theoretic approach to a communications problem [J]. J. SIAM Appl. Math., 1966, (14): 778 - 781.

[5] Li Y, Cai M. A degree condition for graph to have [a, b] - factor [J]. J. Graph Theory, 1998, 21 (1): 1 - 6.

Some Results on (g, f)-Factorizations of Graphs

LI Ji-meng[1], LI Jian-xiang[2], YANG Xi-tao[2]

(1. *Department of Mathematics*, *College of Shaoyang*, *Shaoyang* 422004, *China*;

2. *Department of Mathematics*, *Hunan University of Science and Technology*, *Xiangtan* 411201, *China*)

Abstract: Three problems for the study of factorizations of graphs are discussed. It is proved that: (1) Let $Z = \{x(V(G): d_G(x) - mg(x) \leq t(x)$ or $mf(x) - d_G(x) \leq t(x); t(x) = f(x) - g(x) > 0\}$. If $Z \neq \varnothing$, both g and f are not even, then (mg, mf) - graph has a (g,f) - factorization. (2) Let G be a m - regular graph with $2n$ vertices, $m \geq n$. If $(P_1, P_2, \cdots, P_r)$ is a partition of m, $P_1 \equiv m \pmod 2$, $P_i \equiv 0 \pmod 2$, $i = 2, \cdots, r$, then edge set $E(G)$ of G can be parted into r parts $E_1, E_2, \cdots, E_r$ of $E(G)$, so that $G[E_i]$ is P_i - factor of G. (3) Let G be a m - regular graph with $2n$ vertices, $m \geq n$. If G contains no K_3, G has 1 - factorization.

Key words: graph; factor; factorization