文章编号:1006-544X(2002)03-0234-05

离散卡尔曼滤波用于GPS动态变形数据处理

马 攀[1],文鸿雁[1,2]

(1.桂林工学院 土木工程系,广西 桂林 541004;2.武汉大学 测绘学院,湖北 武汉 430079)

摘 要:研究了一种卡尔曼滤波算法,通过算例对我国1998年洪水期某大坝的实测GPS动态变形数据,采用自编软件(用C语言)进行处理,其成果图形象直观地显示出滤波值数据曲线与原始数据曲线的变化趋势基本一致,同时验前与验后的单位权方差 $\hat{\sigma}_0^2$ 很相近,并且滤波值中误差 $\hat{\sigma}_{滤}$ 也比观测值中误差 $\hat{\sigma}_{测}$ 小得多.该离散卡尔曼滤波数学模型较好地模拟了目标系统的物理变化规律,其程序运算结果对于改善GPS动态变形的数据精度的效果比较理想.

关键词:卡尔曼滤波;GPS;高斯-马尔柯夫序列

中图分类号:O211.64;P228.4 文献标识码:A

0 引 言

目前,在变形监测中,由于GPS、测地机器人等新技术不断引用,积累资料多,数据量大,如何及时地有效地从大量的变形监测信息中进行数据挖掘,即抽取、转换、分析和进行建模处理,从中提取关键性的数据,对变形进行分析与解释,尤其是对建筑物的变形进行预测,使人们能及时地针对变形建筑物变形状态进行有效处理,对滑坡等灾害及时做好有关方面的防范和预防措施,从而极大地减少因建筑物变形或滑坡等地质灾害造成的损失.所以对变形监测信息进行数据挖掘,特别是对大型建筑物的变形进行分析与预测十分重要.

卡尔曼滤波(Kalman,1960)是当前应用最广的一种动态数据处理方法,它具有最小无偏方差性[1,2].把变形体视为一个动态系统,将一组观测值作为系统的输出,可以用卡尔曼滤波模型来描述系统的状态.动态系统由状态方程和观测方程描述,以监测点的位置、速率和加速率参数为状态向量,可构造一个典型的运动模型.状态方程中要加进系统的动态噪声.其滤波方程是一组递推计算公式,计算过程是一个不断预测、修正的过程,在求解时,优点是不需保留用过的观测值序列,并且当得到新的观测数据时,可随时计算新的滤波值,便于实时处理观测成果,把参数估计和预报有机地结合起来.卡尔曼滤波特别适合变形监测数据的动态处理.

而在GPS用于动态变形观测中,是仅在确定的瞬间来研究系统的性能,而在此瞬间所得的观测值本身是带有随机噪声的.如果能在这个系统中分别找出表示它们的状态参数与其观测值之间的函数关系,那么就可以利用卡尔曼滤波来减弱随机噪声的干扰,达到提高GPS变形观测数据精度的目的.为此,本文将对卡尔曼滤波用于某大坝GPS动态形变数据处理作一些探讨.

收稿日期:2001-12-24;修订日期:2002-04-03

基金项目:广西壮族自治区教育厅资助项目(1998-169)

作者简介:马 攀(1977-),男,四川南部人,硕士研究生,大地测量学与测量工程专业.

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1　离散线性系统的卡尔曼滤波

1.1　离散线性系统卡尔曼滤波的数学描述

当不考虑系统具有确定性输入时，可设系统状态方程和量测方程分别为[2]

$$\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{F}_{k/k-1}\boldsymbol{X}_{k-1} + \Gamma_{k-1}\boldsymbol{W}_{k-1} \qquad (k = 1, 2\cdots), \tag{1}$$

$$\boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{E}_k \qquad (k = 1, 2\cdots), \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{X}_k$ 为 k 时刻的 n 维状态矢量，也是被估计矢量；$\boldsymbol{Y}_k$ 为 k 时刻上 m 维量测矢量；$\boldsymbol{F}_{k/k-1}$ 为 $k-1$ 到 k 时刻的系统一步转移矩阵（$n\times n$ 阶）；$\boldsymbol{W}_{k-1}$ 为 $k-1$ 时刻的系统噪声（r 维）；Γ_{k-1} 为系统噪声矩阵（$n\times r$ 阶），它表征由 $k-1$ 到 k 时刻的各个系统噪声分别影响 k 时刻各个状态的程度；$\boldsymbol{H}_k$ 为 k 时刻的量测矩阵（$m\times n$ 阶）；$\boldsymbol{E}_k$ 为 k 时刻的 m 维量测噪声．卡尔曼滤波要求 $\boldsymbol{W}_k$ 和 $\boldsymbol{E}_k$ 是互不相关的零均值的白噪声序列，有

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{W}_k) = 0,\ \mathrm{E}(\boldsymbol{E}_k) = 0, \tag{3}$$

$$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{W}_j) = \boldsymbol{Q}_k\delta_{kj},\quad \mathrm{Cov}(\boldsymbol{E}_k, \boldsymbol{E}_j) = \boldsymbol{R}_k\delta_{kj},\ \mathrm{Cov}(\boldsymbol{W}_k, \boldsymbol{E}_j) = 0, \tag{4}$$

式中 $\mathrm{Cov}(A, B)$ 为 A 关于 B 的协方差阵，$\boldsymbol{Q}_k$ 和 $\boldsymbol{R}_k$ 分别称为系统噪声和量测噪声的方差矩阵，在卡尔曼滤波中它们分别是已知值的非负定阵和正定阵；δ_{kj} 是 Kronecker δ函数，即

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 0 & (k \neq j), \\ 1 & (k = j). \end{cases} \tag{5}$$

初始状态的一、二阶统计特性为

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}_0) = m_{X_0},\ \mathrm{Var}(\boldsymbol{X}_0) = C_{X_0}, \tag{6}$$

式中 $\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}_0)$ 为对 $\boldsymbol{X}_0$ 求方差的符号．卡尔曼滤波要求 m_{X_0} 和 C_{X_0} 为已知量，且要求 $\boldsymbol{X}_0$ 与 $\boldsymbol{W}_k$ 以及 $\boldsymbol{E}_k$ 都不相关．

为便于叙述，现将离散卡尔曼滤波的其它方程总结如下

状态预测　　$\boldsymbol{X}_{k/k-1} = \boldsymbol{F}_{k/k-1}\boldsymbol{X}_{k-1}$；　　(7)

方差预测　　$\boldsymbol{D}_{k/k-1} = \boldsymbol{F}_{k/k-1}\boldsymbol{D}_{k-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}_{k/k-1} + \Gamma_{k/k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\Gamma^{\mathrm{T}}_{k/k-1}$；　　(8)

状态估计　　$\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{X}_{k/k-1} + \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{Y}_k - \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_{k/k-1})$；　　(9)

方差迭代　　$\boldsymbol{D}_k = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{D}_{k/k-1}$；　　(10)

滤波增益　　$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{D}_{k/k-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}_k(\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{D}_{k/k-1}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}_k + \boldsymbol{R}_k)^{-1}$；　　(11)

初始值　　$\boldsymbol{X}_0 = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_0),\ \boldsymbol{D}_0 = \mathrm{Var}(\boldsymbol{X}_0)$．　　(12)

（7）和（8）式是利用 $\boldsymbol{X}_{k-1}$ 求 $\boldsymbol{X}_k$ 的预报值 $\boldsymbol{X}_{k/k-1}$ 及其方差公式，也就是利用 $\boldsymbol{Y}_1$，$\boldsymbol{Y}_2$，…，$\boldsymbol{Y}_{k-1}$ 求 $\boldsymbol{X}_k$ 的预测值的公式，称此式为一步预测公式；而称 $\boldsymbol{X}_{k/k-1}$ 为一步预测值．（9）式中的（$\boldsymbol{Y}_k - \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_{k/k-1}$）称为预报残差，（9）式的物理意义是：滤波值等于预报值加一修正项，该修正项由预报残差乘增益矩阵构成．因此，通常称 $\boldsymbol{K}_k$ 为滤波增益矩阵．

1.2　卡尔曼滤波的性质和特点

从 1.1 可以看到，卡尔曼滤波方程是一组递推计算公式，其计算过程是一个不断地预测、修正的过程．在求解时不需要贮存大量的观测数据，并且当得到新的观测数据时，可随时算得新的滤波值，便于实时处理观测成果．卡尔曼滤波还具有以下特点：

①卡尔曼滤波递推公式是根据广义最小二乘原理得到的，按广义最小二乘原理得到的结果具有无偏性和方差最小性．因此，对于高斯—马尔柯夫序列模型来说，卡尔曼滤波值 $\hat{\boldsymbol{X}}(k/k)$ 是由观测值 $\boldsymbol{Y}_1$，$\boldsymbol{Y}_2$，…，$\boldsymbol{Y}_k$ 得到 $\boldsymbol{X}_k$ 的最小方差无偏估计，其误差方差阵 $\boldsymbol{D}_X(k/k)$ 就是所有估计中的最小方差阵．对于一个马尔柯夫序列模型来说，$\hat{\boldsymbol{X}}(k/k)$ 则是 $\boldsymbol{X}_k$ 的线性最小方差无偏估计[2]．

②对于具有一致完全能观性和一致完全能控性的线性系统，滤波递推充分多的步数后，滤波误差

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

方差阵 $\boldsymbol{D}_{k/k}$将不依赖于$\boldsymbol{D}_0$，滤波值也渐渐地不依赖于初始值的选取[3]．

③从卡尔曼滤波方程可以看出，增益矩阵 $\boldsymbol{K}_k$ 与观测值无关，因此，可以预先算出，从而减少实时处理的计算工作量．

④从（11）式可知：当 $\boldsymbol{R}_k$ 增大时，增益矩阵 $\boldsymbol{K}_k$ 变小，这是因为观测噪声增大，则滤波的增益就应取小一些，以减弱观测噪声对滤波值的影响．

⑤在应用卡尔曼滤波中，除了尽可能精确地描述动态方程和观测方程外，还要选取适当的 $\boldsymbol{Q}_k$ 和 $\boldsymbol{R}_k$，这个可以通过试算获得，也可以自适应估计之．

⑥预报残差（$\boldsymbol{Y}_k-\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_{k/k-1}$）是一个零均值的高斯—马尔柯夫序列[2]．

⑦卡尔曼滤波是将全部待估参数都作为正态随机量，按照广义最小二乘原理来求定参数的最佳估计值．当已知参数的先验统计性质时，由于卡尔曼滤波考虑了这种性质，因此，所得到的估值比最小二乘平差估值具有更高的精度．

2 卡尔曼滤波程序设计

2.1 数学模型

从 1.1 可得到如下卡尔曼滤波的递推公式[3]

$$\boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{D}_{k/k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{D}_{k/k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_k)^{-1}, \tag{13a}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k=\boldsymbol{F}_{k/k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}+\boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{Y}_k-\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{F}_{k/k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}), \tag{13b}$$

$$\boldsymbol{C}_k=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{D}_{k/k-1}, \tag{13c}$$

$$\boldsymbol{D}_{k/k-1}=\boldsymbol{F}_{k/k-1}\boldsymbol{C}_{k-1}\boldsymbol{F}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}+\Gamma_{k/k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\Gamma_{k/k-1}^{\mathrm{T}}. \tag{13d}$$

上式中 $\boldsymbol{R}_k$ 为$m\times m$ 阶的观测噪声 $\boldsymbol{E}_k$ 的协方差阵；$\hat{\boldsymbol{X}}_k$ 为 n 维向量，第 k 时刻经滤波后的估值；$\boldsymbol{K}_k$ 为 $n\times m$ 阶的增益矩阵；$\boldsymbol{C}_k$ 为$n\times n$ 阶的估计误差协方差阵；$\boldsymbol{Q}_k$ 为 $n\times n$ 阶的模型噪声 $\boldsymbol{W}_k$ 的协方差阵．

根据上述公式，可以从 $\hat{\boldsymbol{X}}_0=\mathrm{E}(\boldsymbol{X}_0)$，$\boldsymbol{D}_0$（给定）出发，利用已知的矩阵 $\boldsymbol{Q}_k$，$\boldsymbol{R}_k$，$\boldsymbol{H}_k$，$\boldsymbol{F}_{k/k-1}$以及 k 时刻的观测值 $\boldsymbol{Y}_k$，递推地算出每个时刻的状态估计 $\hat{\boldsymbol{X}}_k$（$k=1,2,\cdots$）．

如果线性系统是定常的，则有 $\boldsymbol{F}_{k/k-1}=\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{H}_k=\boldsymbol{H}$，即它们都是常阵；如果模型噪声 $\boldsymbol{W}_k$ 和观测噪声 $\boldsymbol{E}_k$ 都是平稳随机序列，则 $\boldsymbol{Q}_k$ 和 $\boldsymbol{R}_k$ 都是常阵．在这种情况下，常增益的离散卡尔曼滤波是渐进稳定的．

2.2 程序流程图

程序设计流程图见图 1．

3 算例及数据分析

3.1 算例参数

在本次大坝 GPS 动态形变测量数据处理的算例中，是对我国 1998 年洪水期某大坝，用双频 GPS 定位仪器进行垂直于大坝轴线方向位移观测值的“滤波”．观测历元间隔为 15 s，每隔 6 h 计算一次，共计 65 d 的观测数据．

设观测点的状态向量为 $\boldsymbol{X}_k=(X,X')^{\mathrm{T}}$，并取其初值为

$$\boldsymbol{X}_0=(1.3,0)^{\mathrm{T}}.$$

状态转移矩阵为[6]

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1 & \Delta t_k\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

其中 Δt_k 为采样间隔，在本例中取 $\Delta t_k=6$ h，即

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

量测矩阵为 $\boldsymbol{H}=(1,0)$. 动态系统维数为 $n=2$, 观测系统维数为 $m=1$.

初始估计误差协方差阵取为

$$\boldsymbol{D}_0=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

模型噪声协方差阵取为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1.2 & 0\\ 0 & 1.2\end{bmatrix}.$$

取观测向量序列长度 $k=260$. 对输出的状态向量序列每 5 个打印一次.

3.2　结果分析与讨论

为了直观地说明卡尔曼滤波程序的处理结果, 现将其作图 2, 在滤波的问题中, 一般是要求知道噪声 Δ 的方差 $\boldsymbol{D}_\Delta$ 和信号 $\boldsymbol{X}$ 的先验方差 $\boldsymbol{D}_X$. 由于滤波的计算公式可以按广义最小二乘原理导出, 所以可以在滤波中求得观测值 $\boldsymbol{Y}$ 的改正值 $\boldsymbol{V}$ (即 $-\Delta$ 的估值), 以及虚拟观测值 $\boldsymbol{Y}_x$ 的改正值 $\boldsymbol{V}_x$ (即 $-\mu_x$ 的估值), 并利用 $\boldsymbol{V}$ 和值 $\boldsymbol{V}_x$ 来求得验后的单位权方差 $\hat{\sigma}_0^2$, 这里只考虑 $\boldsymbol{D}_{x\Delta}=0$ 和信号 $\boldsymbol{X}$ 的数学期望 $\mu_x=0$ (即 $\boldsymbol{Y}_x=0$ 时) 的情况.

根据滤波中求验后单位权方差的公式[2] $\hat{\sigma}_0^2=\Omega/n$, 这里的 $\Omega=-\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_\Delta\boldsymbol{V}$, 于是将 3.2 的计算数据代入上式, 可得算例的验后单位权方差 $\hat{\sigma}_0^2=\Omega/n=306.8/260=1.18$.

又根据求中误差估值的基本公式 $\hat{\sigma}=\pm\sqrt{[\Delta\Delta]/n}$, 可得算例的观测值中误差 $\hat{\sigma}_{\text{测}}=\pm1.30$ mm, 滤波值中误差 $\hat{\sigma}_{\text{滤}}=\pm1.07$ mm.

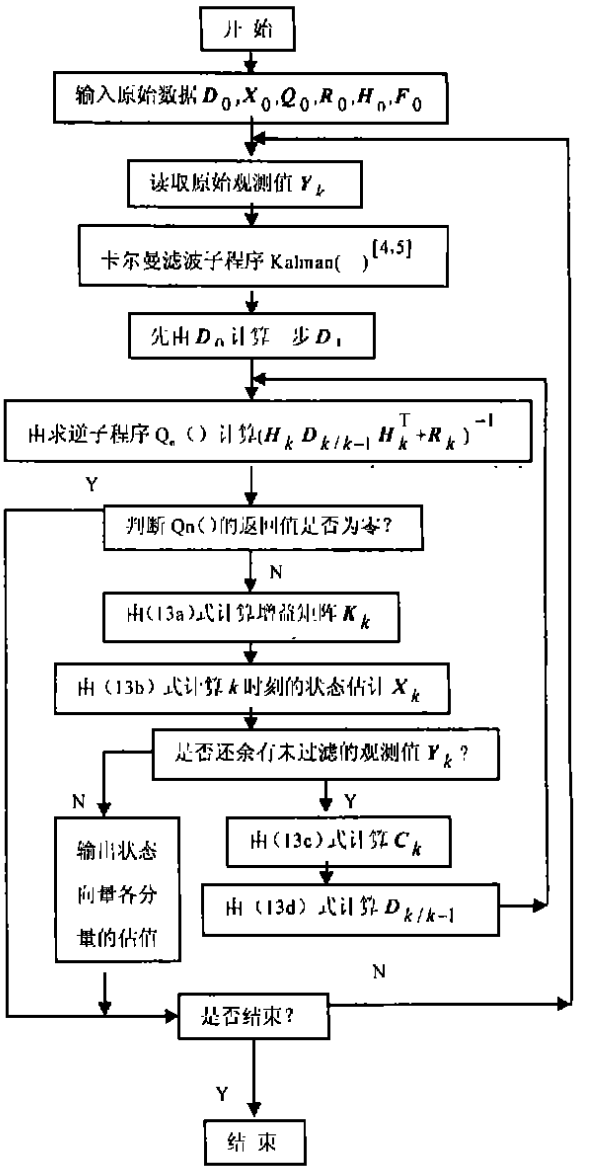


图 1　卡尔曼滤波程序流程图

Fig. 1　The sequence chart of Kalman filtering program

由图 2 不难看出, 该算例成果图形象直观地显示出滤波值数据曲线与原始数据曲线的变化趋势基本一致; 同时, 比较上面的计算数据可知, 算例的验后单位权方差 $\hat{\sigma}_0^2=1.18$ 与验前所取的方差 $\hat{\sigma}_0^2=1.2$ 相近, 说明验前选取的方差是恰当的; 并且, 滤波值比观测值的精度提高了约 17.7%. 至此, 也就是说明该卡尔曼滤波数学模型较好地模拟了目标系统的物理变化规律, 表明所运用的卡尔曼滤波程序的运算结果比较理想.

4　结　论

(1) 通过对大坝 GPS 动态形变测量数据的算例及其数据分析可知, 运用卡尔曼滤波方法可以明显地改善 GPS 动态变形的数据精度, 并能大量地 (待估状态向量可以多维) 实时处理 GPS 动态变形数据. 由于适合在微机或小型计算机上应用, 因此其处理速度是其它方法难以比拟的.

(2) 在卡尔曼滤波程序用于算例的试算中, 对于选取不同的模型噪声和观测噪声协方差阵, 获得的各滤波值也略有差异, 这说明合理确定一个待估状态系统的数学模型, 选择适当的建模参数, 更好

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

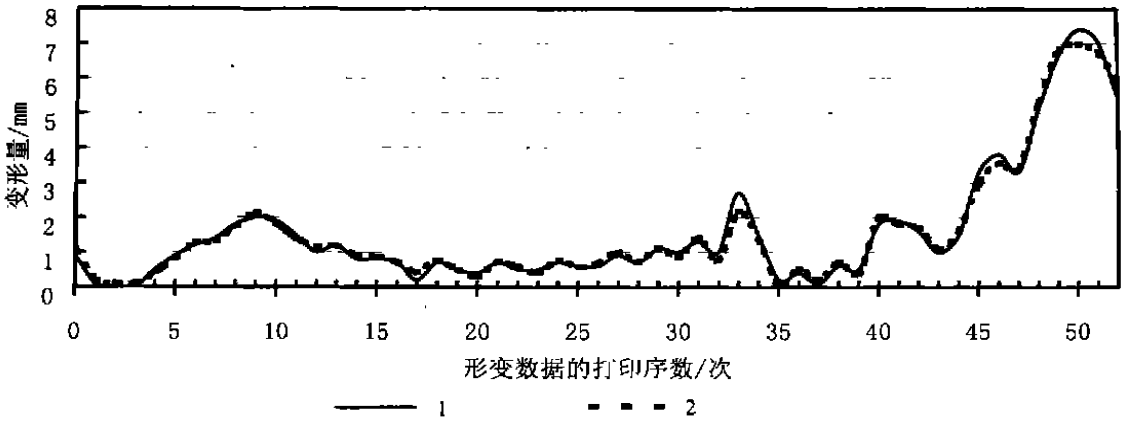


图 2 大坝于坝轴线垂直方向（所设正方向）上的形变数据处理成果图

Fig. 2 The achievement chart of deformation data processing of big dam in vertical line to spool thread of the dam (positive direction assumed)

1—原始数据曲线；2—滤波后数据曲线

地拟合动态系统的物理变化规律，则卡尔曼滤波的效果更佳.

（3）对于稳定的系统来说，只要初始值足够精确，就能保证以后的滤波值达到任意指定的精度. 在实际应用中仅仅只有稳定性是不够的，渐进稳定的系统则具有更优的性质，即不论初始值有多大的偏差，只要滤波时间充分长，就能自行消除初始值偏差的影响，保证滤波值的准确性.

（4）由于在实践中，卡尔曼滤波系统存在建模误差及计算机有效字长的限制等原因，可能导致滤波发散. 然而由于卡尔曼滤波的广泛应用，克服滤波发散将是一个重要的研究方向.

参考文献：

[1] 董绪荣, 陶大欣. 一个快速 Kalman 滤波方法及其在 GPS 动态数据处理中的应用[J]. 测绘学报, 1997, 26(3): 221～227.
[2] 崔希璋, 於宗俦, 陶本藻, 等. 广义测量平差[M]. 北京：测绘出版社, 1992. 228～240.
[3] 谢衷洁. 滤波及其应用[M]. 长沙：湖南教育出版社, 1995. 186～192.
[4] 谭浩强. C 程序设计[M]. 北京：清华大学出版社, 1991.
[5] 刘大杰, 白征东, 施一民, 等. 大地坐标转换与 GPS 控制网平差计算及软件系统[M]. 上海: 同济大学出版社, 1997. 50～55.
[6] 刘大杰, 施一民, 过静君. 全球定位系统的原理与数据处理[M]. 上海：同济大学出版社, 1996. 128～130.

Application of discrete Kalman filtering to GPS data processing of kinematic deformation

MA Pan[1], WEN Hong-yan[1,2]

(1. *Department of Civil Engineering, Guilin Institute of Technology, Guilin* 541004, *China*; 2. *School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan* 430079, *China*)

Abstract: An approach of calculation of Kalman filtering is studied. The program adapted from the computer language C was applied to process the GPS kinematic deformation data of actual measurements for some big dam in our country in the 1998-flood season as a testing case. It is obvious that the achievement chart of this example vividly indicates the changing tendency of the data curve of filtering value very close to the one of raw data. Meanwhile, variance of unit weight before statistical test is approximately equal to the one after statistical test, there is less standard error of filtering values than the one of measured values. The mathematical model of this discrete Kalman filtering appropriately simulates the law of physical variation of observation system. It is ideal to improve the GPS data accuracy of kinematic deformation by carrying on the software of Kalman filtering.

Key words: Kalman filtering; GPS; Gauss-Markov series

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net