第22卷 第2期 桂 林 工 学 院 学 报 Vol.22 No.2
2002年4月 JOURNAL OF GUILIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY Apr. 2002

文章编号:1006-544X(2002)02-0123-06

电性轴对称分布电阻率测井的有限元法模拟

欧东新，阮百尧

(桂林工学院 资源与环境工程系，广西桂林 541004)

摘 要：针对石油勘探中需要精确确定沿井轴方向和径向电阻率变化的要求，提出了一种考虑地面影响且电阻率在纵向（井轴）上和径向上都分块均匀变化的测井二维有限单元法数值模拟方法. 采用异常电位法，使计算精度大大提高，并采用变带宽存储系数矩阵以节约内存. 经过与理论曲线对比证明此方法有效. 本方法有助于模拟复杂的地质情况，可以作为精确反演的基础，由于考虑了地面的影响又可以用它进行一些近地表的工程物探方法的研究.

关键词：测井；有限单元法；电导率；异常电位法

中图分类号：P631.322；P631.811 文献标识码：A①

在石油勘探中，岩石电阻率与储集层的重要参数如孔隙度、含油饱和度等有直接关系，所以求岩石电阻率是电法测井的主要任务之一. 但通常测井所得曲线是岩层的视电阻率曲线，是地下岩层电阻率、侵入带电阻率、围岩电阻率的综合反映. 由于其间的关系复杂，到目前为止，只对在横向上电阻率突变的情况有解析解，而对其他的更加复杂的情况一般采用模型实验的方法进行视电阻率的测量. 随着计算机技术的发展，使得人们用各种数值法解决复杂的地球物理问题成为可能，而有限元法以其适用于物性参数复杂分布的区域，并且解题过程规范而被越来越多的人所采用.

陈丽虹曾用混合法模拟了电阻率测井[1]，但只考虑了电导率在径向上变化而在纵向上不变的情况. 本文采用的有限元法，电导率在横向和纵向分块均匀变化，能够模拟更加复杂的地质情况，此外，采用异常电位法，使计算精度大大提高. 以往的测井模拟中一般都没有考虑地面的影响，而根据全空间电位理论来进行解释，当测点离地面较近时，地面的影响造成测井曲线的畸变，用理论曲线来解释就会造成很大的误差，为了解决该问题，本文在进行测井的有限元数值模拟中还考虑了地面影响.

1 基本原理

点源稳定电流场的电位满足的微分方程[2]

$$\nabla_3 \cdot (\sigma \nabla_3 v) = -I\delta(A) \tag{1}$$

假设井中的地质构造是以井轴为中心轴对称的（图1），则当电源点 S 在井轴上移动时，它的电位也是轴对称的，采用柱坐标系，则 $\partial v / \partial \varphi = 0$，方程（1）变为

$$\nabla \cdot (x\sigma \nabla v) = -I\delta(A)x,$$

其中 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y$；$x$，$y$ 分别相当于柱坐标中的 r，z；$\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$ 为单位坐标向量；I 为电流强度.

① 收稿日期：2001-09-06；修订日期：2001-12-03
基金项目：国家自然科学基金资助项目（40064001）；广西自然科学基金匹配资助项目
作者简介：欧东新（1974-），男，广西恭城人，硕士研究生，主要从事电法勘探正反演的研究.

同理，异常电位 $u=(v-u_0)$ 满足[2]

$$\nabla\cdot(x\sigma\nabla u)+\nabla\cdot(x\sigma'\nabla u_0)=0 \tag{2}$$

式中：σ 为介质的电导率；$\sigma'=\sigma-\sigma_0$ 为异常电导率，u_0 为地下充满电导率为 σ_0 时的正常电位.

选取足够大的矩形研究区域（图 2)，其中 AD 为地面线，AB 为井轴，DC 和 BC 为无穷远边界. 由于地面线和井轴上电流强度的法向分量为零，因而在和边界上电位的法向导数为零

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AB,AD}=0. \tag{3}$$

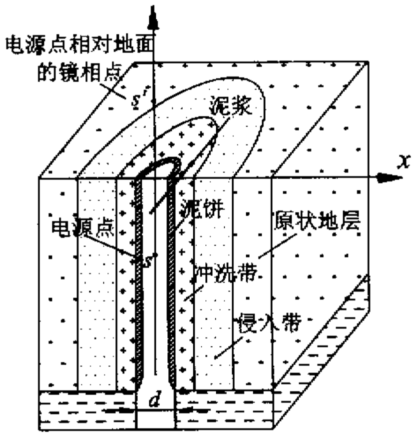

图 1 钻井地质模型

Fig.1 Logging model

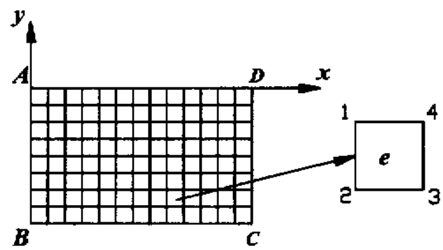

图 2 有限元法剖分

Fig.2 Division of finite element method

假定在无穷远边界 BC 和 DC 上任一点 p 处电位满足 $u=c/r_1+c/r_2$，于是有

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial r_1}\cos(r_1,n)+\frac{\partial u}{\partial r_2}\cos(r_2,n),$$

其中：r_1，r_2 分别为电源点 S 和电源点的镜象点 S' 到 p 点的距离；(r_1,n)，(r_2,n) 分别为 r_1，r_2 与边界外法向量的夹角. 所以在边界 BC 和 CD 有边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{u}{r_1+r_2}\left(\frac{r_2^2\cos(r_1,n)+r_1^2\cos(r_2,n)}{r_1r_2}\right). \tag{4}$$

因此得到轴对称二维地电断面的边值问题

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot(x\sigma\nabla u)+\nabla\cdot(x\sigma'\nabla u_0)=0 && \in\Omega\\ &\frac{\partial u}{\partial n}=0 && \in AB,AD\\ &\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{u}{r_1+r_2}\left(\frac{r_2^2\cos(r_1,n)+r_1^2\cos(r_2,n)}{r_1r_2}\right) && \in BC,CD\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

与之对应的变分问题为：

$$\begin{aligned}F(u)=&\int_\Omega\left[\frac{1}{2}x\sigma(\nabla u)^2+x\sigma'\nabla u_0\cdot\nabla u\right]\mathrm{d}\Omega+\int_{BC,CD}\left[\frac{1}{2}x\sigma\frac{r_2^2\cos(r_1,n)+r_1^2\cos(r_2,n)}{r_1r_2(r_1+r_2)}u^2\right]\mathrm{d}\Gamma\\&+\int_{BC,CD}\left[x\sigma'\frac{r_2^2\cos(r_1,n)+r_1^2\cos(r_2,n)}{r_1r_2(r_1+r_2)}u_0u\right]\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{6}$$

$$\delta F(u)=0$$

2 有限元法

用有限单元法求解，步骤如下.

①用矩形单元对区域进行剖分，如图 2 所示，将方程（6）的积分分解为各单元 e 和 Γ_e 的积分之和.

$$F(u)=\sum F_e(u)=\sum\int_e\left[\frac{1}{2}x\sigma(\nabla u)^2+x\sigma'\nabla u_0\cdot\nabla u\right]\mathrm{d}\Omega$$
$$+\sum_{BC,DC}\int_{\Gamma}\left[\frac{1}{2}x\sigma\frac{r_2^2\cos(r_1,n)+r_1^2\cos(r_2,n)}{r_1r_2(r_1+r_2)}u^2\right]\mathrm{d}\Gamma+\sum_{BC,DC}\int_{\Gamma_e}\left[x\sigma'\frac{r_2^2\cos(r_1,n)+r_1^2\cos(r_2,n)}{r_1r_2(r_1+r_2)}u_0u\right]\mathrm{d}\Gamma. \tag{7}$$

②在单元中对 u，u_0 采用双线性插值

$$u=\sum_{i=1}^{4}N_iu_i,\quad u_0=\sum_{i=1}^{4}N_iu_{0i},$$

式中：N_i（$i=1$，2，3，4）为形函数，是 x，y 的函数，等于

$$\left.\begin{aligned}N_1&=(x_3-x)(y-y_2)/ab,\quad N_2=(x_3-x)(y_1-y)/ab,\\N_3&=(x-x_2)(y_1-y)/ab,\quad N_4=(x-x_2)(y-y_2)/ab.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

其中(x_i,y_i)为单元第 i 个节点的坐标$(i=1,2,3,4)$，$a=x_3-x_2$，$b=y_1-y_2$.

③公式（7）第一项中的单元积分为

$$\left.\begin{aligned}&\int_e\frac{1}{2}x\sigma(\nabla u)^2\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{2}\int_e x\sigma\left\{u_e^{\mathrm{T}}\left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}+\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}\right]u_e\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_e^{\mathrm{T}}\left\{\int_e x\sigma\left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}+\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}\boldsymbol{u}_e=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{1e}\boldsymbol{u}_e,\\&\int_e x\sigma'\nabla u_0\cdot\nabla u\,\mathrm{d}\Omega=\boldsymbol{u}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}'_{1e}\boldsymbol{u}_{0e},\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中：$\boldsymbol{u}_e=(u_i)$，$\boldsymbol{u}_{0e}=(u_{0i})$分别为单元中各节点的电位和正常电位所组成的向量，$\boldsymbol{K}_{1e}$（$K_{ij}$为 4×4 对称矩阵），其值为

$$\left.\begin{aligned}K_{11}&=\frac{1}{12}\left[4\sigma\frac{b}{a}r_0+2\sigma\frac{a}{b}\left(2r_0-\frac{a}{2}\right)\right]\\K_{21}&=\frac{1}{12}\left[2\sigma\frac{b}{a}r_0-2\sigma\frac{a}{b}\left(2r_0-\frac{a}{2}\right)\right]\\K_{31}&=-\frac{1}{12}\left(2\sigma\frac{b}{a}r_0+2\sigma\frac{a}{b}r_0\right)\\K_{41}&=-\frac{1}{12}\left(4\sigma\frac{b}{a}r_0-2\sigma\frac{a}{b}r_0\right)\\K_{22}&=\frac{1}{12}\left[4\sigma\frac{b}{a}r_0+2\sigma\frac{a}{b}\left(2r_0-\frac{a}{2}\right)\right]\\K_{32}&=-\frac{1}{12}\left(4\sigma\frac{b}{a}r_0-2\sigma\frac{a}{b}r_0\right)\\K_{42}&=-\frac{1}{12}\left(2\sigma\frac{b}{a}r_0+2\sigma\frac{a}{b}r_0\right)\\K_{33}&=\frac{1}{12}\left[4\sigma\frac{b}{a}r_0+2\sigma\frac{a}{b}\left(2r_0+\frac{a}{2}\right)\right]\\K_{43}&=\frac{1}{12}\left[2\sigma\frac{b}{a}r_0-2\sigma\frac{a}{b}\left(2r_0+\frac{a}{2}\right)\right]\\K_{44}&=\frac{1}{12}\left[4\sigma\frac{b}{a}r_0+2\sigma\frac{a}{b}\left(2r_0+\frac{a}{2}\right)\right]\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中：$r_0=(x_2+x_3)/2$. $\boldsymbol{K}'_{1e}$的计算方法与$\boldsymbol{K}_{1e}$基本相同，只是把（10）式中的 σ 变为σ'即可.

④公式（7）第二项单元积分可写成对单元$\overline{23}$边和单元$\overline{34}$边的积分

$$\int_{\overline{23}}\left[\frac{1}{2}x\sigma\frac{r_2^2\cos(r_1,n)+r_1^2\cos(r_2,n)}{r_1r_2(r_1+r_2)}u^2\right]\mathrm{d}\Gamma=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{2e}\boldsymbol{u}_e, \tag{11}$$

$$\int_{\overline{34}}\left[\frac{1}{2}x\sigma\frac{r_2^2\cos(r_1,n)+r_1^2\cos(r_2,n)}{r_1r_2(r_1+r_2)}u^2\right]\mathrm{d}\Gamma=\frac{1}{2}\boldsymbol{u}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{3e}\boldsymbol{u}_e, \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{K}_{2e}$为

$$\boldsymbol{K}_{2e} = \sigma \cdot \frac{r_2^2\cos(r_1,n) + r_1^2\cos(r_2,n)}{r_1 r_2(r_1 + r_2)} \cdot \frac{a}{12}\begin{bmatrix} 0 & & \text{对} & \\ 0 & 3x_2 + x_3 & & \text{称} \\ 0 & x_2 + x_3 & x_2 + 3x_3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

$\boldsymbol{K}_{3e}$为

$$\boldsymbol{K}_{3e} = x_3 \cdot \frac{r_2^2\cos(r_1,n) + r_1^2\cos(r_2,n)}{r_1 r_2(r_1 + r_2)} \cdot \frac{b}{12}\begin{bmatrix} 0 & \text{对} & & \\ 0 & 0 & \text{称} & \\ 0 & 0 & 4\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma & 4\sigma \end{bmatrix}. \tag{14}$$

同理公式（7）第三项单元积分可写为对单元$\overline{23}$边和单元$\overline{34}$边的积分：

$$\int_{\overline{23}}\left[x\sigma' \frac{r_2^2\cos(r_1,n) + r_1^2\cos(r_2,n)}{r_1 r_2(r_1 + r_2)} u_0 u\right]\mathrm{d}\Gamma = \boldsymbol{u}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}'_{2e}\boldsymbol{u}_{0e}, \tag{15}$$

$$\int_{\overline{34}}\left[x\sigma' \frac{r_2^2\cos(r_1,n) + r_1^2\cos(r_2,n)}{r_1 r_2(r_1 + r_2)} u_0 u\right]\mathrm{d}\Gamma = \boldsymbol{u}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}'_{3e}\boldsymbol{u}_{0e}, \tag{16}$$

其中 $\boldsymbol{K}'_{2e}$与$\boldsymbol{K}'_{3e}$的算法同$\boldsymbol{K}_{2e}$与$\boldsymbol{K}_{3e}$，只是把 σ 换成σ'.

⑤把单元积分各项相加可写成如下形式：

$$\begin{aligned} F_e(u) &= \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_e^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}_{1e} + \boldsymbol{K}_{2e} + \boldsymbol{K}_{3e})\boldsymbol{u}_e + \boldsymbol{u}_e^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{K}'_{1e} + \boldsymbol{K}'_{2e} + \boldsymbol{K}'_{3e})\boldsymbol{u}_{0e} \\ &= \frac{1}{2}\boldsymbol{u}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_e\boldsymbol{u}_e + \boldsymbol{u}_e^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}'_e\boldsymbol{u}_{0e}, \end{aligned} \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{K}_e = \boldsymbol{K}_{1e} + \boldsymbol{K}_{2e} + \boldsymbol{K}_{3e}$，$\boldsymbol{K}'_e = \boldsymbol{K}'_{1e} + \boldsymbol{K}'_{2e} + \boldsymbol{K}'_{3e}$，设区域有 n 个节点，将它们扩展成 n 阶方阵$\overline{\boldsymbol{K}_e}$，$\overline{\boldsymbol{K}'_e}$，则

$$F_e(u) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{K}_e}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{K}'_e}\boldsymbol{u}_0. \tag{18}$$

迭加

$$F(u) = \sum_e F_e(u) = \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}'\boldsymbol{u}_0, \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{u}$ 为所有节点的异常电位，$\boldsymbol{u}_0$ 为所有节点的正常电位，$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{K}'$为总体矩阵. 令之变分为零，得线性方程组

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{K}'\boldsymbol{u}_0,$$

解线性方程组得各节点的电位，进而可以计算视电阻率.

3 算 例

3.1 模型 1

首先利用层状大地的地面电测深曲线来检验算法是否有效，模型 1 为 3 层水平大地，层参数为：第 1 层厚度 $h_1 = 1$ m，$\rho_1 = 50\ \Omega\cdot\mathrm{m}$；第 2 层的厚度 $h_2 = 5$ m，$\rho_2 = 100\ \Omega\cdot\mathrm{m}$；第 3 层 $\rho_3 = 20\ \Omega\cdot\mathrm{m}$；供电电极在井轴上方地面，在地面上沿 x 方向移动测量电极. 视电阻率 ρ_a 计算结果如图 3 所示. 用本文的异常电位有限单元法得到的测深曲线，与解析法所得曲线拟合得非常好，说明本文导出的方法计算精度是可靠的.

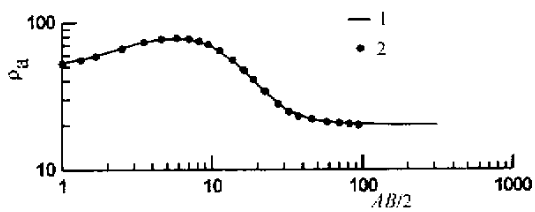

图 3 模型 1 的有限单元法与解析法计算的测深曲线对比

Fig.3 Results of FEM and theoretical sounding curve

1—有限元法；2—解析解

3.2　模型 2

模型 2（图 4）为两层轴对称模型：第 1 层的直径 $d=10.4$ m，电阻率为 $\rho_1=20\ \Omega\cdot$m；第 2 层 $\rho_2=100\ \Omega\cdot$m．M，N 点固定在地下 1 000 m 处两侧，供电点逐渐移向地面，另一个供电点在无穷远处．不考虑地面影响的横向测井理论曲线[3] 与用本文有限元法计算所得的曲线对比见图 5，当电源点接近地面时，曲线发生严重的畸变，如果这时用理论曲线来进行解释，就会得出错误的结果．因此在测点比较靠近地面时，在对测井曲线进行解释时必须考虑地面的影响．

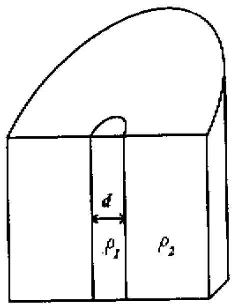

图 4　模型 2 结构

Fig.4　Model 2

$d=10.4$ m；$\rho_1=20\ \Omega\cdot$m；$\rho_2=100\ \Omega\cdot$m

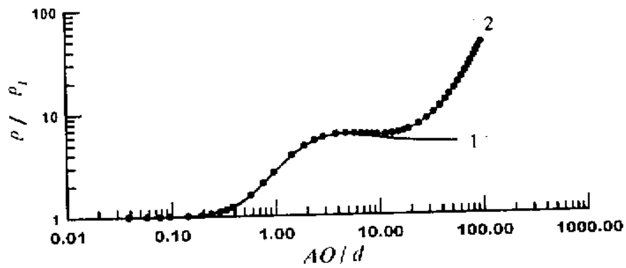

图 5　不考虑地面影响的横向测井理论曲线与实际曲线对比

Fig.5　Results of considering effects of ground and theoretical logging curve

1—理论曲线；2—异常电位法

3.3　模型 3

模型 3 如图 6 所示，$H=1\ 000.8$ m，$L=2.2$ m，$d=10.4$ m，$\rho_1=20\ \Omega\cdot$m，$\rho_2=100\ \Omega\cdot$m，$\rho_3=400\ \Omega\cdot$m．电极位置同上例，用本文有限元法计算所得的横向测井曲线见图 7．图中点线为用本文有限元法计算所得的横向测井曲线，对于这种复杂的模型没有理论的曲线；图中的实线为不考虑纵向电阻率 ρ_3 变化的简化理论曲线．可以看出两者相差很大，有限元法的结果对高阻薄层有反应，曲线的极小值是由于高阻层排斥电流所造成的．

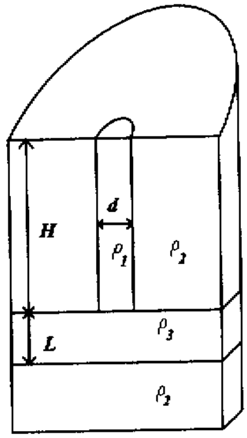

图 6　模型 3

Fig.6　Model 3

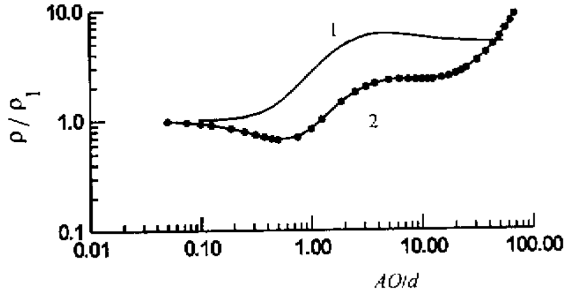

图 7　模型 3 的有限元结果

Fig.7　Results of model 3 using FEM

1—简化理论曲线；2—有限元法

4 结 论

由于本方法在纵横两个方向电导率分块均匀变化，比模式匹配法更能适应复杂的地电条件．可以作为精确反演的基础．此外，由于考虑了地面的影响，对于近地表的工程物探研究也有一定的帮助．

参考文献：

[1] 陈丽虹，李舟波．侵入带对视电阻率的影响 [J]．长春科技大学学报，1999，29（3）：295～298．
[2] 徐世浙．地球物理中的有限元法 [M]．北京：科学出版社，1994．172～178．
[3] 张庚骥．电法测井（上册）[M]．北京：石油工业出版社，1986．62～67．

FEM simulating logging with axial-symmetric resistivity distribution

OU Dong-xing，RUAN Bai-yao
(*Department of Resource & Environmental Engineering*，*Guilin Institute of Technology*，*Guilin* 541004，*China*)

Abstract：Considering the effect of ground and in accordance with axial-symmetric resistivity distribution，a 2-D FEM (finite element method) using abnormal potential method to simulate logging is put forward in this paper，which makes use of variable bandwidth to store matrix of coefficients in order to save the internal memory. Its conductivity is homogeneous in each block. It is proved effective in term of good overlapping of theoretical curve and the curve derived from the method in this paper. Moreover，it can also be applied to method study as engineering physical survey near the earth surface.

Key words：logging；finite element method；abnormal potential method；conductivity