第 21 卷 第 2 期　　桂 林 工 学 院 学 报　　Vol.21 No.2
2001 年 4 月　　JOURNAL OF GUILIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY　　Apr. 2001

文章编号：1006－544X(2001)02－0110－04

二维非均匀介质中大地电磁的耦合模拟

谢忠球[1]，温佩琳[1]，朱德兵[1]，吴功建[2]

（1．中南大学资源环境与建筑工程学院，湖南长沙　410083；2．中国地质科学院地质研究所，北京　100037）

摘　要：阐述了边界元法的基本原理及其在二维大地电磁测深正演中的实现过程，深入研究了边界单元和有限单元的耦合模拟方法，目的在于为二维大地电磁测深提供实用的、精确的、计算效益高的计算工具。理论研究及模型计算表明，这种耦合方法能够有效地模拟大地电磁场的变化规律。

关键词：二维大地电磁测深；边界元；有限元；正演；耦合模拟

中图分类号：P631.325　　文献标识码：A①

大地电磁测深是研究地球内部电性变化的一种方法，经济、方便、场源频谱丰富、勘探深度大，在大地构造研究、石油及天然气、地热田勘探等方面应用广泛。在二维地电模型条件下，有限元方法的模拟研究与应用最为普遍[1～3]，但该方法计算量大、速度慢，所以对于快速、精确、有效的边界元计算方法的研究，日益受到重视。研究主要集中在直流电法勘探模拟计算方面[4,5]。由于该方法处理复杂介质的灵活性不大，其应用受到了限制。有限元和边界元耦合方法可望综合两种方法的优点，克服缺点[6,7]。目前，这种耦合方法在大地电磁中的应用研究方面的文献尚未见到。本文将通过理论分析、模型计算对这种方法进行比较系统的研究。

1　大地电磁的二维问题

基本方程：大地电磁场可以近似地看作是在地球表面垂直入射的平面波[1～3]。在地面上选取一右旋直角坐标系，令 z 轴垂直向下，y 轴水平向右，x 轴为走向方向，见图 1，则有 $\partial/\partial x = 0$。取与时间有关的因子为 $e^{-i\omega t}$，并忽略位移电流，则从 Maxwell 方程出发得到 H_x 型和 E_x 型偏振波，可统一表示成：

$$\partial\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial y}\right)/\partial y + \partial\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial z}\right)/\partial z - \lambda u = 0 \qquad (1)$$

对 E_x 型：$u = E_x$，$\eta = -i\omega\mu$，$\lambda = \sigma$；对 H_x 型：$u = H_x$，$\eta = \sigma$，$\lambda = -i\omega\mu$。其中：u 为电场或磁场；ω 为圆频率；μ 和 δ 分别是介质磁导率和电导率；ε 为介电常数。

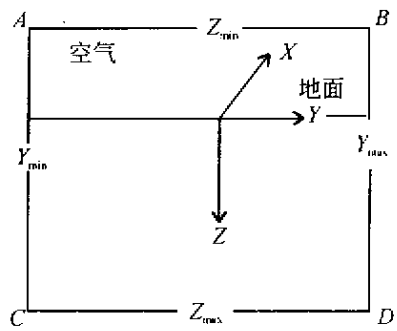


图 1　区域坐标图

Fig. 1　Chart of regional coordinate

2　非均匀介质中大地电磁场边界元方法

首先，导出均匀介质的大地电磁场边界元方程。从（1）式可知，大地电磁二维正演问题，实质上

① 收稿日期：2000－05－15；修订日期：2000－07－11
基金项目：湖南省教育厅“大深度激电法研究”项目（教科技中心 96－13）
作者简介：谢忠球（1964－），男，湖南湘潭人，在读博士研究生，地球探测与信息技术专业。

是解偏微分方程。对于均匀介质，电导率和磁导率都是常量，从而(1)式可以归结为解 Helmhotz 方程

$$\Delta^2 u + k^2 u = 0, \quad k^2 = i\omega\mu\sigma \tag{2}$$

考虑在区域 Ω 上的 Helmhotz 方程。将节点取在光滑边界上，可以推出二维 Helmhotz 方程的边界积分型式

$$\frac{1}{2}u(r^2) + \int_{\Gamma}\frac{\partial u^*}{\partial n}u\mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}u^*\mathrm{d}\Gamma \tag{3}$$

其中：r 为从观察点到场源点的距离，

$$u^* = iH_0^{(1)}(kr)/4, \quad q^* = kiH_1^{(1)}(kr)/4 \tag{4}$$

对于积分方程，用高斯积分计算各节点场值，完成边界积分方程的离散化过程[4~8]，从而得到边界元方程

$$HU = GQ \tag{5}$$

求解方程（5），便可以求出边界场值分布。

在二维大地电磁测深中，可以假定地下介质是分块均匀的。本文以 2 个子域的边界元模型为例。在 2 个子域分别建立边界元方程

$$\left.\begin{aligned} H^1U^1 &= G^1Q^1 \\ H^2U^2 &= G^2Q^2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

其中：$Q = \partial U/\partial n$。将相交边界场值用下标 Γ 表示，其余边界场值用下标 R 表示，子域分别用 1，2 表示，则上述两式可以用下式表示

$$\begin{bmatrix} H_R^1 & H_\Gamma^1 & -\alpha_1 G_\Gamma^1 & 0 \\ 0 & H_\Gamma^1 & -\alpha_2 G_\Gamma^1 & H_R^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_R^1 \\ U_\Gamma \\ Q_\Gamma \\ U_R^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_R^1 & 0 \\ 0 & G_R^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_R^1 \\ Q_R^2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

其中：$\alpha_1 = \begin{cases}\sigma_1, & H\text{ 极化} \\ 1, & E\text{ 极化}\end{cases}$；　$\alpha_2 = \begin{cases}\sigma_2, & H\text{ 极化} \\ 1, & E\text{ 极化}\end{cases}$。

按给定的边界条件，可以求解上述方程，即得出各节点场值及法向导数值，也可以进一步用下式求出各个域内点的场值

$$u_i = \int_{\Gamma_i}\frac{\partial u^*}{\partial n}u\mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_i}u^*\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma \tag{8}$$

辅助场值：　$\dfrac{\partial u}{\partial z} = \displaystyle\int_{\Gamma_i}\frac{\partial u^*}{\partial z}\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_i}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* u\mathrm{d}\Gamma$

进而求出相应的视电阻率 ρ_s。

从上面的公式可以看出边界元法可以直接求场值的导数，从而可以提高视电阻率值的计算精度。

3　数值模型边界条件的确定

对于偏微分方程求定解，必须给定涉及问题的边界条件。对于垂直入射的平面电磁波，取上边界（$Z = Z_{\min}$）处场 u 为常数；左右两边界（$Y = Y_{\max}$，$Y = Y_{\min}$）处满足场的法向偏导数为零，即 $\partial u/\partial n = 0$；下边界（$Z = Z_{\max}$）处，取为第三类边界条件，即 $\partial u/\partial z = \partial u/\partial n = -ku$，其中 $k = \sqrt{-i\omega\mu\sigma n}$ 为复波数，σ_n 为深度 $Z_{\max}$ 以下介质的电导率。建立模型时，采用矩形边界元区域，主要是考虑计算方便并减少边界元法中角点效应的误差。在下面讨论的有限元方法中，将边界条件写成一般解析式为：$\partial u/\eta\partial n + \alpha u = \beta$，以便求泛函的变分。其中 α 和 β 的取值如下。

$Z = Z_{\min}$：E_x 型波 $\alpha = 0$，$\beta = -1$；H_x 型波 $\alpha = \beta = 10^{20}$。

$Z = Z_{\max}$：E_x 型波 $\alpha = 1/Z_n$，$\beta = 0$；H_x 型波 $\alpha = Z_n$，$\beta = 0$。

$Y = Y_{max}$，$Y = Y_{min}$：$\alpha = \beta = 0$。

$Z_n = \sqrt{-i\omega\mu\rho_n}$为下边界的表面阻抗。

4 非均匀介质中大地电磁场的有限元方程

从（1）式已经知道，大地电磁二维正演问题，实质上是求偏微分方程在一定边界条件下的解。根据变分原理，用有限元法解上述偏微分方程，等价于求下列泛函的变分为 0 即泛函

$$F(u) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - \lambda u^2\right] d\Omega + \int_{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\alpha u^2 - \beta u\right) d\Gamma \tag{9}$$

的变分 δF（u）$= 0$。其中：α，β 为边界条件中的常系数。

为了研究方便，本文采用平行于研究区域边界的矩形单元，假设每个矩形单元内的场函数为 u，则可以求出包括 u_1，u_2，u_3，…，u_n 的线性方程组的矩阵形式

$$[\boldsymbol{K}][\boldsymbol{U}] = \boldsymbol{F} \tag{10}$$

解此复数矩阵方程，即可求得各节点场值 u，进而求得辅助场值，最后求得视电阻率及相位[1]：

$$\left.\begin{aligned} \rho_a &= |Z^2 i/\omega\mu| \\ \theta &= \theta_E - \theta_H \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

对地面上不同点进行同一计算，得到某一周期的视电阻率 $\rho_{a(y)}$和阻抗相位 θ 剖面曲线，再对周期进行循环计算，便可得到地面上若干点的 $\rho_{a(y)}$和阻抗相位 $\theta_{(T)}$的测深曲线。

5 非均匀介质中大地电磁的有限元与边界元耦合模拟

将研究区域 D 分为 D_1、D_2 两个部分（图 2），其中假设 D_1 是均匀介质域，用边界元法求解；D_2 是非均质域，用有限元求解，然后用等价方法求解联合方程。

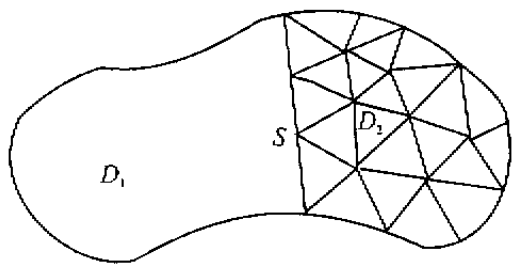


图 2 BEM – FEM 耦合模拟区域示意图

Fig. 2 Sketch of the combination BEM – FEM region

在子域 D_1 内建立边界元方程，并将已知项放在右边，未知项放在左边，则（10）式变成如下形式

$$\begin{bmatrix} Q_d \\ U_n \\ Q_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_d \\ \boldsymbol{Q}_n \\ U_s \end{bmatrix} \tag{12}$$

其中：$\boldsymbol{U}_d$，$\boldsymbol{Q}_n$ 为已知向量，它们分别是边界 Γ_{d_1}和 Γ_{n_1}节点上 U 和 Q 的值。从方程可以看出，已经找到边界值问题解的表达式，它们可以用边界条件 $\overline{U}$、$\overline{Q}$ 以及 U_s 来表示，可以看出 U_n、Q_s、Q_d 都是 U_s 的函数。

将子域 D_1 当成有限元意义上的一个单元来计算与 D_1 域边界场值有关的能量

$$E_1(u) = \int_{\Gamma} \frac{\alpha}{2} u^2 d\Gamma, \quad \alpha = \begin{cases} (\varepsilon/\mu)^{1/2}, E \text{ 极化}, \\ (\mu/\varepsilon)^{1/2}, H \text{ 极化} \end{cases} \tag{13}$$

在子域 D_2 上依据前述方法建立能量公式

$$E_2(u) = \frac{1}{2} U^{\mathrm{T}} K U - [U]^{\mathrm{T}}[F] \tag{14}$$

从而可以求全域能量的极小值，即 $E = E_1 + E_2$ 的极小值。求 $\partial E/\partial U_i = 0$，得到下列形式的矩阵方程：

$$[\boldsymbol{K}][\boldsymbol{U}] = \boldsymbol{F} \tag{15}$$

即为有限元与边界元耦合的代数方程。

6　计算和结论

基于上述方法，笔者编写了相应的计算程序并选择了 Berdichevsky 标准地垒和地堑模型进行了计算，结果证明耦合方法可以有效地实现非均匀介质中大地电磁场的模拟。

实例：笔者选择了江阴地区实测剖面进行了计算。根据地电介质复杂程度，将研究区域分成有限元域和边界元域，分别采用矩形单元和线性单元剖分。由于采用了覆盖技术来减少一次装入内存的代码量，程序只需 8 M 内存即可运行。笔者在 128 M 内存，CPU 为 PⅢ550 的微机上做该模型的计算，用时约 30 min。

理论分析和计算证明：耦合模拟方法在处理较简单的地电模型时，可以发挥 2 种方法的优势，并能提高计算精度。应该说明的是，本文对边界元和有限元耦合模拟方法仅仅作了初步的尝试。对于复杂模型的计算有待进一步深入研究。

本项研究曾得到王光锷教授、刘国栋研究员的帮助，谨致谢意。

参考文献：

[1] 刘国栋，陈乐寿．大地电磁测深研究［M］．北京：地震出版社，1984．1～50．
[2] 陈乐寿．有限元法在大地电磁场正演计算中的应用及改进［J］．石油物探，1981，20（3）：84～98．
[3] 史明娟，徐世浙，刘　斌．大地电磁二次函数插值有限元正演模拟［J］．地球物理学报，1997，40（3）：422～429．
[4] 田宪谟，何永富．用边界元法求解复杂地形条件下的视电阻率异常［A］．傅良魁．电法勘探文集［C］．北京：地质出版社，1986．32～39．
[5] 陈福集．边界单元法在直流电法中的应用研究［D］．长沙：中南工业大学，1987．
[6] Costabel M．Coupling of FEM and BEM for the Numerical solution of the Problem of Electromagnetic Scattering from an inhomogeneous Body［M］．Computational Mechanics'88，1988．
[7] Mangulies M．Combination of the boundary element and finite element methods［A］．in：Progress in Boundoary element Methods［C］．1981．1．
[8] 王元淳．边界元法基础［M］．上海：上海交通大学出版社，1988．

A study of magnetotelluric data couple modeling in 2 – D nonhomegeneous media

XIE Zhong-qiu[1]，WEN Pei-lin[1]，ZHU De-bing[1]，WU Gong-jian[2]

（1．*College of Resource，Environment and Civil Engineering，Central South University，Changsha* 410083，*China*；2．*The Institute of Geology，Chinese Academy of Geological Sciences，Beijing* 100037，*China*）

Abstract：This paper expounds the basic principles of the boundary element method，describes how to apply the boundary element method to solve the forward problem of two – dimensional magnetotelluric sounding and studies the method of copying BEM with FEM，with the purposes of producing a more realistic analysis method，offering both accuracy and cost efficiency．Theoretical analysis and modeling example show that the method of coupling BEM with FEM is able to model effectively the variation of MT field．

Key words：2 – D MT；boundary element method；finite element method；forward problem；couple modeling