第21卷 第3期 桂林工学院学报 Vol.21 No.3
2001年7月 JOURNAL OF GUILIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY Jul. 2001

文章编号：1006－544X(2001)03－0300－03

一类非线性椭圆问题三角形二次元的超收敛性

熊之光，杨喜陶，李爱翠

（湘潭工学院数学与软件研究所，湖南湘潭 411201）

摘 要：基于均匀三角形的剖分，已有文献认为对二阶椭圆问题的二次有限元的情形，在节点处有四阶超收敛精度。以此为基础，本文针对一类二阶非线性椭圆问题，也得到二次有限元解在节点处有四阶超收敛精度，数值计算表明结果是正确的。

关键词：均匀三角形剖分；二阶非线性椭圆问题；二次有限元

中图分类号：O242.21 文献标识码：A①

0 引言

考虑下列非线性椭圆第一边值问题：

$$\begin{cases} -D_j(a_{ij}D_iu) + a_{j0}D_ju + a_{00}u + g(u) = f, & \text{in}\Omega \\ u = 0, & \text{on}\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

即寻求 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使得：

$$A(u,v) + (g(u),u) = (f,v), \forall\, v \in H_0^1(\Omega), \tag{2}$$

其中：$f \in L_2(\Omega)$，$g(u) \in C^2$，并假定双线性 $A(u,v) = \int_\Omega (a_{ij}D_iuD_jv + a_{j0}D_jv + a_{00}uv)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 是强制的，这里 $\Omega = \{(x,y) \mid 0 < x,y < 1\}$.

现将 Ω 作三角形均匀部分 J^h，直角边界上的步长记为 h，所有单元 $\tau\in J^h$ 的角点及中点构成节点集 Z_h，记有限元子空间 $S_0^h = \{u\in C(\overline{\Omega}_h) \mid$ 在每个 $\tau\in J^h$ 上 u 为二次多项式，且 $v\mid_{\partial\Omega} = 0\}$，则在 S_0^h 上求解有限元解 u_h 满足：

$$A(u_h,v) + (g(u_h),v) = (f,v), \forall\, v \in S_0^h,$$

即

$$A(u - u_h,v) + (g(u) - g(u_h),v) = 0, \forall\, v \in S_0^h.$$

文献［1，2］都对线性随圆方程的边值问题三角形元进行了研究，文献［2］对 $z\in Z_h$ 的点有：$(u - u_h)(z) = O(h^4|\ln h|)$. 作者在此基础上，也获得了一类非线性椭圆三角形二次元类似结果：

定理：设区域 Ω 的三角形剖分是均匀的，$u\in W^{4,\infty}(\Omega)\cap H_0^1$，且 $u_h\in S_0^h$ 是 u 的二次有限元解，则在每个三角形单元的角节点和边中点上均有超收效性：

$$(u - u_h)(z) = O(h^4\mid\ln h\mid).$$

1 定理的证明

将任意三角形单元转化为参考三角形 $E = \{(s,t) \mid -1 < s < 1,\ -1 < t < 1 - s\}$，仍记函数

① 收稿日期：2000－12－05
基金项目：湖南省自然科学基金资助项目（99JJY2003）
作者简介：熊之光（1964－），男，湖南凤凰人，硕士，讲师，研究方向：微分方程数值解法。

$$u(x,y) = u(x(s,t),y(s,t)) \triangleq u(s,t)$$

引进 Legender 正交多项式 $l_j = \partial^{j-1}(t^2-1)^j/(2j)!!$（注意 $l_j(\pm 1) = (\pm 1)^j$），对 t 积分后得 $M-$多项式：$M_0 = 1$，$M_1 = t$，…，$M_{j+1} = \partial^{j-1}(t^2-1)^j/(2j)!!$，若 $i-j = 0$ 或 ± 2，则有 $(M_i, M_j) \neq 0$，显然对 $n \geqslant 2$ 有 $M_n(\pm 1) = 0$.

由文献［2，3］得到：

引理 1：若（2）的真解 $u \in W^{4,\infty}(\Omega)$，则 u 可以展开成

$$u = b_{00} + b_{10}s + b_{01}t + b_{11}st + b_{20}M_2(s) + b_{02}M_2(t) + b_{30}M_3(s,t) + b_{21}(s+t)(s+1)(t+1) + b_{12}(s-t)(s+1)(t+1) + b_{03}M_3(t) + r$$

令：$R = R' + r$，$R' = b_{30}M_3(s,t) + b_{21}(s+t)(s+1)(t+1) + b_{12}(s-t)(s+1)(t+1) + b_{03}M_3(t)$.

取 $u_2 = b_{00} + b_{10}s + b_{01}t + b_{11}st + b_{20}M_2(s) + b_{02}M_2(t)$，则余项 R，r 分别满足：

①在 E 的三角点处 $R = 0$，$r = 0$；

②在 E 的三边上 $R \perp P_0$（零次多项式），$r \perp P_1$；

③在 E 的三边中点上处 $|R| \leqslant \mathrm{ch}^4 \| u \|_{4,\infty,\Omega}$；

④在 E 的任何点有 $|r| \leqslant \mathrm{ch}^4 \| u \|_{4,\infty,\Omega}$.

以 u_2 为单元 E 内插函数，由文献［2］的定理，取 $m = 2$ 得到：

引理 2：设区域 Ω 的三角形剖分是均匀的，$u \in W^{4,\infty}(\Omega) \cap H_0^1$，且 $u_h \in S_0^h$ 是 u 的二次有限元解，则 $A(u-u_h, v) = O(h^4) \| u \|_{4,\infty} \| v \|_{2,1} \forall v \in S_0^h$.

引理 3：设 $f(x,y) \in C^2(\Omega)$，$g(x,y) \in L(\Omega)$，Ω 为有界分段光滑边界的平面区域

令 $g^+(x,y) = \begin{cases} g(x,y), g(x,y) \geqslant 0 \\ 0, g(x,y) < 0 \end{cases}$，$g^-(x,y) = \begin{cases} -g(x,y), g(x,y) \leqslant 0 \\ 0, g(x,y) > 0 \end{cases}$，那末

$\int_\Omega f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi_1,\eta_1)\int_\Omega g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + [f(\xi_1,\eta_1) - f(\xi_2,\eta_2)]\int_\Omega g^-(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 由积分中值引理即可证明.

引理 4：若 $g(u) \in C^2$，（2）的真解 $u \in W^{4,\infty}(\Omega)$，$u_I$ 为三角形二次插值，对 $\forall v \in S_0^h$ 有

$$\left| \int_\Omega (g(u) - g(u_I)) v \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| = O(h^4) \| u \|_{4,\infty} \| v \|_{2,1}.$$

证明：由引理 3 可得到：

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega (g(u) - g(u_I)) v \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| &= \left| \int_\Omega R g'(u^*) v \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \\ &\leqslant |g'(u_1^*)| \left| \int_\Omega Rv \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| + |g'(u_1^*) - g'(u_2^*)| \left| \int_\Omega (Rv)^+ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \\ &\leqslant \| g(u) \|_{0,\infty} \left| \int_\Omega Rv \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| + |(u_1^*) - (u_2^*)| |g''(u_{12}^*)| \left| \int_\Omega (Rv)^+ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| \\ &\leqslant \| g(u) \|_{0,\infty} \left| \int_\Omega Rv \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| + \| g(u) \|_{1,\infty} |(u_1^*) - (u_2^*)| \| R \| \| v \| \\ &\leqslant \| g(u) \|_{0,\infty} \left| \int_\Omega Rv \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right| + \| g(u) \|_{1,\infty} \| R \|^2 \| v \|. \end{aligned}$$

利用文献[1]中的单元合并技巧并由文献[2,3]的结果得到：$\int_\Omega Rv\mathrm{d}x\mathrm{d}y = O(h^4) \| u \|_{4,\infty} \| v \|_{2,1}^*$，而 $\| R \|^2 = O(h^8)$，故 $\int_\Omega (g(u) - g(u_I)) v \mathrm{d}x\mathrm{d}y = O(h^4) \| u \|_{4,\infty} \| v \|_{2,1}$.

下面证明定理，令 $v = g_h$ 为 Green 函数，由文献［1，2］及引理 2、4，则有一致超收敛估计：

$$\begin{aligned} \| u_h - u_I \|_{4,\infty} &= |A(u_h - u_I, g_h) + (A(u_h) - g(u_I), g_h)| \\ &= |A(u_h - u_I, g_h) + (A(u_h) - g(u_I), g_h)| \leqslant ch^4 |\ln h| \| u \|_{4,\infty} \end{aligned}$$

这样有：$u - u_h = u - u_I + (u_I - u_h) = R + O(h^4 |\ln h| \| u \|_{4,\infty})$，从而在单元 $\tau \in J^h$ 的角节

点上有：$u - u_h(z) = O(h^4 \mid \ln h \mid)$，定理得证.

2 数 例

用三角形二次元求解下列问题：

$$\begin{cases} -\Delta u + u^3 = f, & \text{in}\Omega \\ u = 0, & \text{on}\partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

其中精确解是：$u(x,y) = y(1-x)\sin(x(1-y))$，将 Ω 区域先 $N \times N$ 均匀剖分成 N^2 个小正方形，然后在以左上右下的对角线分成2个等腰直角三角形，就得到 $J_{N\times N}$，笔者分别就 $N = 4,8,16$ 的网格计算了有限元解 u_h，下面将有限元 u_h 在几个节点处的误差 e_h 及误差比 e_N/e_{2N} 的值列于表1：

表1 9节点有限的误差值对比

Table 1 The error contrast of finite element on nine points

剖分	$J_{4\times4}$	$J_{8\times8}$	$J_{16\times16}$	误差比	误差比
Ω 内节点	e_4	e_8	e_{16}	e_4/e_8	e_8/e_{16}
(0.25, 0.25)	-1.304 4e-4	-7.754 0e-6	-4.788 4e-7	16.82	16.19
(0.50, 0.25)	-1.209 0e-4	-7.451 3e-6	-4.640 7e-7	15.60	16.06
(0.75, 0.25)	-8.509 7e-5	-5.535 4e-6	-3.489 5e-7	15.37	15.86
(0.25, 0.50)	-1.163 4e-4	-7.055 6e-6	-4.375 6e-7	16.49	16.12
(0.50, 0.50)	-1.220 9e-4	-7.445 0e-6	-4.624 8e-7	16.40	16.10
(0.75, 0.50)	-1.209 0e-4	-7.451 3e-6	-4.640 7e-7	16.23	16.06
(0.25, 0.75)	-1.140 8e-4	-6.757 0e-6	-4.168 5e-7	16.89	16.21
(0.50, 0.75)	-1.163 4e-4	-7.055 6e-6	-4.375 6e-7	16.48	16.12
(0.75, 0.75)	-1.304 4e-4	-7.754 0e-6	-4.788 4e-7	16.82	16.19

从表中看出，在单元的内节点处，三角形二次元达到 $O(h_4)$ 的超收敛阶，与理论分析相符合.

参考文献：

[1] 陈传淼，黄云清. 有限元高精度理论 [M]. 长沙：湖南科学技术出版社，1995.

[2] 陈传淼. 三角形有限元的超收敛性 [J]. 中国科学 (A辑)，1990，29 (6)：501~508

[3] 易 军. 三角形二次元的超收敛性 [D]. 长沙：湖南师范大学，1997.

[4] Chen C M. The element analysis method and superconvergence [A]. Krizek M，Neittaanmaki P，Stenberg R，*eds*. Finite Element Mehtods [C]. Marcel Dekker，Inc，1998. 71~84.

[5] 朱起定. 二次三角形的导数佳点 [J]. 湘潭大学学报，1980，(2)：12~20.

[6] Chen C M. $W^{1,\infty}$ - interior for finite element methods on regular mesh [J]. J. Comput Math，1985，(3)：1~7.

The superconvergence of triangle quadratic finite element for a class of nonlinear elliptical problems

XIONG Zhi-guang，YANG Xi-tao，LI Ai-cui

(*Institute of Mathematics and Software*，*Xiangtan Polytechnic University*，*Xiangtan Hunan* 411201，*China*)

Abstract：Based on equality trilateral dissectation，documents stated the fourth order superconvergent precision on nodal points. This paper gains the superconvergence of triangle quadratic finite element on nodal points for a class of nonlinear elliptical problems. Numerical computations show that the result is correct.

Key words：equality trilateral dissectation，the second order nonlinear elliptical problems，the triangle quadratic finite