层状各向同性弹性地基柔度矩阵的计算

王杰光 陈先华

（桂林工学院建设工程系，541004）

摘 要 利用传递矩阵方法给出了分层均质弹性地基柔度矩阵的计算公式，并对双层地基上的条形基础给出了一计算实例，结果表明，地基非均质性对沉降影响系数影响较大。

关键词 层状地基；传递矩阵；柔度矩阵；沉降影响系数；地基模型

分类号 TU471．2

地基柔度矩阵的计算，是研究地基、基础及上部结构的共同作用时首先要解决的问题。目前已有不少的地基计算模型用以计算地基柔度矩阵[1~3]，但对于各向同性多层体系地基模型，目前只较好地解决了空间轴对称问题，而对于一般的空间问题，得到的结果很复杂，不易求解。本文利用传递矩阵法，得到了多层地基受任意分布荷载作用下的位移解析式。该公式简洁，尤其便于计算地基柔度矩阵。

1 地基柔度矩阵

把地基视为弹性半空间是常用的地基计算模型，此时，地基上任意点 i 的沉降与整个基底反力及邻近荷载的分布都有关，其关系一般情况下只能由数值法求得近似解。为此，将基础底面适当分割为一系列矩形（图 1），第 i 个矩形面积为 f_i，中点为 i 节点，$f_i=(2a_i)\cdot(2b_i)$，为便于计算，应注意使各 f_i 相差不能太大，且 f_i 的长度 $2a_i$ 和宽度 $2b_i$ 不能相差太悬殊，各矩形块 f_i 上的分布接触压力可视为均布力 p_i，并简化为以集中力 R_i 的方式作用于 i 节点，记为反力向量 $\{R\}$

$$\{R\}=[R_1,\ R_2,\ R_3,\ \cdots R_i,\ \cdots R_n]^T \tag{1}$$

各节点 i 的竖向位移 W_i 记为位移向量 $\{W\}$

$$\{W\}=[W_1,\ W_2,\ W_3,\ \cdots W_i,\ \cdots W_n]^T \tag{2}$$

于是 $\{W\}$ 和 $\{R\}$ 的关系可写为：

$$\{W\}=[\delta]\{R\} \tag{3}$$

或

$$\{R\}=[K]\{W\} \tag{4}$$

式中，$[\delta]$ 即为所谓的地基柔度矩阵：

$$[\delta]=\begin{bmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn}\end{bmatrix}$$

1996年11月18日收稿。

第一作者简介：王杰光，男，1961年出生，副教授，岩土工程专业。

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www

其中，δ_{ij}称沉降影响系数，它代表在第 j 块矩形上的均布竖向荷载$p_j=1/f_j$ 在i 节点处产生的竖向位移，当各矩形尺寸相等时，有 $\delta_{ij}=\delta_{ji}$，即 $[\delta]$ 为对称方阵。$[K]$ 称为地基刚度矩阵，$[K]=[\delta]^{-1}$。采用不同的地基模型，则 δ_{ij}的计算方法和结果也不同[3]。

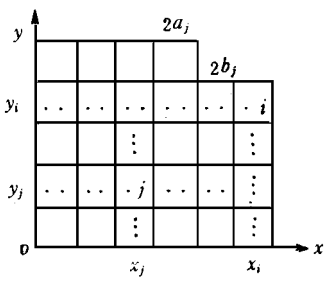


图 1 基底矩形分割

Fig. 1 The rectangle catting apart in foundation base

2 计算公式的导出

设地基为各向同性 n 层弹性体系，由文献〔4〕可知，当 xy 平面内作用有对称分布荷载（σ_z（r，0），τ_{zr}（r，0））时，有如下关系成立：

$$\begin{bmatrix}\bar{u}(\zeta,0)\\ \bar{w}(\zeta,0)\end{bmatrix}=\frac{\bar{\sigma}_z(\zeta,0)}{R_{11}R_{22}-R_{21}R_{12}}\begin{bmatrix}R_{22}R_{13}-R_{12}R_{23}\\ R_{11}R_{23}-R_{21}R_{13}\end{bmatrix}-\frac{\bar{\tau}_{zr}(\zeta,0)}{R_{11}R_{22}-R_{21}R_{12}}\begin{bmatrix}R_{22}R_{14}-R_{12}R_{24}\\ R_{11}R_{24}-R_{21}R_{14}\end{bmatrix} \tag{6}$$

式中：$\bar{u}(\zeta,0)$，$\bar{w}(\zeta,0)$ 分别为地表径向位移和竖向位移的汉克尔变换；$\bar{\sigma}_z(\zeta,0)$，$\bar{\tau}_{zr}(\zeta,0)$ 分别为竖向正应力和水平剪应力的汉克尔变换：

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}(\zeta,0)&=\int_0^\infty u(r,0)rJ_1(\zeta r)\mathrm{d}r\\ \bar{w}(\zeta,0)&=\int_0^\infty w(r,0)rJ_0(\zeta r)\mathrm{d}r\\ \bar{\sigma}_z(\zeta,0)&=\int_0^\infty \sigma(r,0)rJ_0(\zeta r)\mathrm{d}r\\ \bar{\tau}_{zr}(\zeta,0)&=\int_0^\infty \tau_{zr}(r,0)rJ_1(\zeta r)\mathrm{d}r\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

式中：$r=\sqrt{x^2+y^2}$；J_0 和 J_1 分别为零阶和 1 阶贝塞尔函数；R_{ij} 为矩阵 R 的第 i 行第 j 列元素：

$$R=r_n\circ r_{n-1}\cdots r_2\circ r_1=\prod_{1=n}^{1}r_i \tag{8}$$

其中，r_i 为第 i 层地基的传递矩阵

$$r_i=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&S_{13}&S_{14}\\ S_{21}&S_{22}&S_{23}&S_{24}\\ S_{31}&S_{32}&S_{33}&S_{34}\\ S_{41}&S_{42}&S_{43}&S_{44}\end{bmatrix} \tag{9}$$

式中：$S_{11}=ch\zeta h_i+\dfrac{\zeta h_i}{2(1-\mu_i)}sh\zeta h_i$；　$S_{12}=\dfrac{1}{2(1-\mu_i)}[(1-2\mu_i)sh\zeta h_i+\zeta h_i ch\zeta h_i]$；

$S_{13}=\dfrac{(1+\mu_i)\zeta h_i}{2(1-\mu_i)E_i\zeta}sh\zeta h_i$；　$S_{14}=\dfrac{(1+\mu_i)}{2(1-\mu_i)E_i\zeta}[(3-4\mu_i)sh\zeta h_i+\zeta h_i ch\zeta h_i]$；

$S_{21}=\dfrac{1}{2(1-\mu_i)}[(1-2\mu_i)sh\zeta h_i-\zeta h_i ch\zeta h_i]$；　$S_{22}=ch\zeta h_i-\dfrac{\zeta h_i}{2(1-\mu_i)}sh\zeta h_i$；

$S_{23}=\dfrac{(1+\mu_i)}{2(1-\mu_i)E_i\zeta}[(3-4\mu_i)sh\zeta h_i-\zeta h_i ch\zeta h_i]$；　$S_{24}=-S_{13}$；　$S_{31}=-\dfrac{E_i\zeta^2}{2(1-\mu_i^2)}h_i sh\zeta h_i$；

$S_{32}=\dfrac{E_i\zeta}{2(1-\mu_i^2)}[sh\zeta h_i-\zeta h_i ch\zeta h_i]$；　$S_{33}=S_{22}$；　$S_{34}=-S_{12}$；

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www

$S_{41}=\frac{E_i\zeta}{2(1-\mu_i^2)}[sh\zeta h_i+\zeta h_i ch\zeta h_i]$；　$S_{42}=-S_{31}$；　$S_{43}=-S_{21}$；　$S_{44}=S_{11}$。

若地基只受竖向应力的作用，则有

$$w(\zeta,0)=\frac{R_{11}R_{23}-R_{21}R_{13}}{R_{11}R_{22}-R_{12}R_{21}}\bar{\sigma}_z(\zeta,0)=-F(E_i,\mu_i,\zeta h_i)\bar{\sigma}_z(\zeta,0) \tag{11}$$

作汉克尔反变换，得竖向位移

$$w(r,0)=-\int_o^\infty F(E_i,\mu_i,\zeta h_i)\bar{\sigma}_z(\zeta,0)\cdot\zeta J_o(\zeta r)\mathrm{d}\zeta \tag{12}$$

式中　$F(E_i,\mu_i,\zeta h_i)=(R_{11}R_{23}-R_{21}R_{13})/(R_{11}R_{22}-R_{12}R_{21})$　(13)

2.1　受集中垂直荷载作用（图 2）

此时，有　$\left.\begin{aligned}\sigma_z(r,0)&=P\delta(r)/2\pi r\\ \text{分别}\quad \tau_{zr}(r,0)&=0\end{aligned}\right\}$　(14)

相应地　$\left.\begin{aligned}\bar{\sigma}_z(r,0)&=P/2\pi\\ \bar{\tau}_{zr}(r,0)&=0\end{aligned}\right\}$　(15)

把（15）式代入（12）式，得

$$w(r,o)=P\cdot(2\pi)^{-1}\int_o^\infty F\cdot J_o(\zeta r)\mathrm{d}\zeta \tag{16}$$

令 $P=1$，$r=((x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2)^{\frac{1}{2}}$　则得

$$\delta_{ij}=(2\pi r^{2-1}\cdot\int_o^\infty F(E_i,\mu_i,h_it/r)\cdot t\cdot J_o(t)\mathrm{d}t \tag{17}$$

式中：$t=\zeta r$；　δ_{ij} 为 j 点处的单位荷载在 i 点产生的沉降，即集中荷载作用下的沉降影响系数。

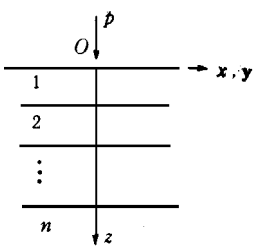


图 2　n 层地基受集中荷载作用

fig. 2　The n layers of foundation acting under the action of focus load

2.2　圆形分布垂直荷载作用（图 3）

此时　$\sigma_z(r,0)=\begin{cases}-p_0, & r<a\ \text{（圆内）}\\ 0, & r>a\ \text{（圆外）}\end{cases}$　(18)

相应地　$\bar{\sigma}_z(\zeta,0)=-p_0\frac{a}{\zeta}J_1(\zeta a)$　(19)

代入（12），得　$w(r,0)=p_o\int_o^\infty F\cdot aJ_o(\zeta r)J_1(\zeta a)d\zeta$　(20)

令 $p_o=(\pi a^2)^{-1}$，$t=\zeta a$，则得

$$\delta_{ij}=(2\pi)^{-1}\cdot\int_o^\infty F(E_i,\mu_i,h_it/a)\cdot J_o(rt/a)J_1(t)dt \tag{21}$$

此即圆形均布荷载作用下的沉降影响系数。

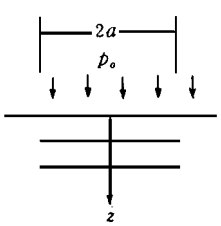


图 3　n 层地基受圆形均布荷载作用

Fig. 3　The n layers of foundation acting under the action of circular well-distributed load

2.3　矩形均布荷载作用

此时，有　$\sigma_z=\begin{cases}-p_0, & 0<x<a,\ 0<y<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

2

利用（16）式，对矩形面积积分，可得角点下的竖向位移（$r=0$）：

$$w(0,0)=\frac{p_o}{2\pi}\int_o^\infty F\cdot\left[\int_0^{\theta_1}J_1\left(\frac{t}{\cos\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}+\int_0^{(\pi/2-\theta_1)}J_1\left(\frac{kt}{\cos\theta}\right)\frac{k\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}\right]\mathrm{d}t$$

式中　$t=\zeta b$，　$k=a/b$，　$\theta_1=\tan^{-1}k$

令 $p_0=1$，则得角点沉降影响系数：

$$\delta(a,b)=\frac{1}{2\pi}\int_o^\infty F\cdot\left[\int_0^{\theta_1}J_1\left(\frac{t}{\cos\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}+\int_0^{(\pi/2-\theta_1)}J_1\left(\frac{kt}{\cos\theta}\right)\frac{k\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}\right]\mathrm{d}t \tag{22}$$

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www

2.4 地基柔度矩阵的计算

忽略基底与地基的摩擦，则地基的柔度矩阵（5）式可由（22）式通过角点法求得：

$$\delta_{ij} = 4\,\delta(a_i, b_i)/f_i = \delta(a_i, b_i)/a_i b_i \tag{23}$$

$$\delta_{ij}=\frac{1}{f_i}\left[\delta(x_i-x_j+a_j,\ y_i-y_j+b_j)+\delta(x_i-x_j-a_j,\ y_i-y_j-b_j)-\right.$$
$$\left.\delta(x_i-x_j-a_j,\ y_i-y_j+b_j)-\delta(x_i-x_j+a_j,\ y_i-y_j-b_j)\right] \quad (i\neq j) \tag{24}$$

为简化计算，当 a_i 和 b_j 相差不大时，可把第 j 块矩形面积用处于同一中心位置的等面积圆来代替，用（21）式来计算沉降影响系数，此时，有

$$\pi a^2 = (2a_j)\cdot(2b_j) = 4a_jb_j$$

即
$$a = (4a_jb_j/\pi)^{1/2} = 2\cdot(a_jb_j/\pi)^{1/2} \tag{25}$$

利用（25）和（21）式来代替（23）或（24）式，可使柔度矩阵的计算大为简化，速度加快，且仍具有足够的精度。

另外，当 $|x_i-x_j|\geqslant 4(2a_j)$ 或 $|y_i-y_j|\geqslant 4(2b_i)$ 时，可采用（17）式来进一步简化柔度矩阵的计算，精度不会损失。

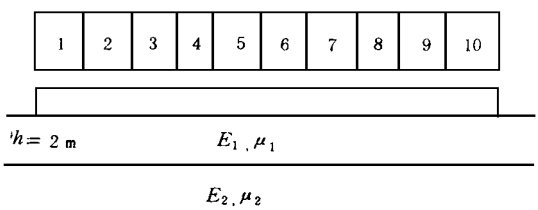


图 4 双层地基上的条形基础

Fig. 4 The strip footing on the double layers of foundation

3 计算实例

某双层地基上的条形基础，宽 2m，长 2m，把梁沿纵向等分为 $n=10$ 段，每段长 $2a=2$m，宽 $2b=2$m（图 4），即每个矩形都是正方形，且面积相等，有 $\delta_{ij}=\delta_{ij}$，[δ] 为对称矩阵，且只有 10 个非相同元素，$\delta_{ij}=\delta_{i+k,j+k}$，$k$ 任意。

表 1 给出了对不同的（E_1，μ_1）和（E_2，μ_2）由（23）和（24）式计算得到的柔度矩阵中的 10 个非相同元素，下卧层的压缩（或变形）模量对沉降系数的影响较大。因此，当 h 较小时，应考虑非均质地基对柔度矩阵的影响。

表 1 双层地基上条形基础的沉降系数

Table 1 The settlement loefficient of strip footing on the double layers of foundation

E_1，μ_1	10，0.30	10，0.30	10，0.30
$(E_1$，$\mu_1)$	20，0.25	20，0.25	5，0.35
δ_{11}	4.23	5.09	6.60
δ_{12}	0.81	1.51	2.84
δ_{13}	0.31	0.74	1.57
δ_{14}	0.19	0.49	1.08
δ_{15}	0.12	0.36	0.84
δ_{16}	0.08	0.29	0.70
δ_{17}	0.05	0.25	0.61
δ_{18}	0.03	0.21	0.55
δ_{19}	0.01	0.18	0.50
δ_{10}	0.01	0.16	0.47

注：E 的单位为 MPa，δ的单位为 cm/MN

参 考 文 献

1 浙江大学，华南工学院. 地基及基础. 北京：中国建筑工业出版社，1991. 231～235

2 A. P. S. 塞尔瓦杜雷著. 土与基础相互作用的弹性分析. 范文田译. 北京：中国建筑工业出版社，1984. 7～25

3 宰金珉，宰金璋. 高层建筑基础分析与设计. 北京：中国建筑工业出版社，1993. 26～63

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www

4　王杰光. 双层及多层水平地基中的应力分布与沉降计算. 桂林冶金地质学院学报, 1995, 15（1）：43～53

A CALCULATION OF FLEXIBILITY MATRIX FOR LAYERED HOMOGENEOUS ELASTIC FOUNDATION

Wang Jieguang　Chen Xianhua
（*Department of Construction Engineering, Guilin Institute of Technology*）

Abstract　A calculation formula used for flexbility matrix on layered homogeneous elastic foundation is given by utilized delivery matrix, and a sample is put for the strip footing on the double layers of foundation. The result indicates that the heterogenousity of foundation makes great impact on settlement coefficient.

Key words　layered foundation; delivery matrix; flexibility matrix; settlement coefficient; foundation model

岩土工程勘察基本术语

工程勘察　为查明和研究与工程建设有关的地形、水文、地下水、地质、岩土的工程性质等条件及它们与工程建设之间可能出现的相互作用关系，并据此作出相应的评价和预测等工程的总称。

岩土工程勘察　为查明、评价工程建设地或地基的岩土技术条件和它们与工程建设之间可能的相互作用所进行的调查、勘探、测试与监测以及对所获资料数据进行工程分析、计算、预测并在此基础上提出有针对性的对岩土的利用、改造、加固等设计、施工措施或方案建议与相应的设计基准、参数等工作的总称。

岩土工程分级　根据工程性质和规模、场地和地基条件等因素，对岩土工程难度和复杂性的等级划分，以及对工程的勘察、设计和施工控制作出技术性和管理性的规定。这种规定通常分为三级。

工程地质测绘　在勘察场地及其外围观察、量测并记录描绘与工程直接或间接有关的各种地质要素，为绘制综合工程地质图等提供依据的工作。

踏勘　为使勘察工作切合实际，事先对勘察地区的地质和施工条件等进行实地概略调查的工作。

选址勘察　对拟选场地的稳定性和适宜性工程地质和岩土技术条件进行评价，为综合考虑其他有关因素、条件做出方案比较与选择的勘察。

初步勘察　为进行初步设计或扩大初步设计，对建筑地区或场地的稳定性和主要岩土类型的分布作出评价，为确定工程的总体布置，进行主要建筑物地基、基础方案比较及不良地质现象的防治方案提供工程地质和岩土技术资料的勘察。

详细勘察　为进行施工图设计，对建筑物地基岩土作出详细的工程地质和岩土技术分析评价，为基础设计和施工提供措施、方案建议和具体的设计基准、参数等资料的勘察。

施工勘察　对岩土技术条件复杂或有特殊使用要求的建筑物地基，需在施工过程中实地检验、补充或在基础施工中发现地质条件和岩土地质条件有变化或与勘察资料不符时而进行的补充勘察。

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www