一种实用的模糊决策方法

吴群英

(桂林工学院基础学科部)

摘 要 把模糊数学理论运用到决策分析中，拓广了决策问题的应用范围。

关键词 隶属度；贴近度；优选

中图号 O159

1 问题的提出

对有 m 个目标 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_m$ 的多目标决策问题，设目标相应的权重分别为 $W_1, W_2, \cdots\cdots, W_m$，假设这一问题有 n 个策略 $b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n$，决策的目的是寻求最优的策略 b_j^*。

用一个策略 b_j ($j=1, 2, \cdots\cdots, n$) 对付一个目标 a_i ($i=1, 2, \cdots\cdots, m$)，有一个效果指标值。由于实际问题的复杂性及客观存在着的模糊性，使选优问题存在着模糊性，对这种情况，用传统的决策分析理论。对 b_j 进行优排序，很难得到一个理想的决策。若把模糊数学中的隶属度理论运用上去，问题将得到改善。

对于模糊概念"优"（以 $\underset{\sim}{A}$ 表示）的隶属度：$\mu_{\underset{\sim}{A}}(b_j)$，即确定映射：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: b_j \to \mu_{\underset{\sim}{A}}(b_j)$$

$\mu_{\underset{\sim}{A}}(b_j) \in [0, 1]$，根据最大隶属度原理，隶属度最大的决策就是最优决策。

2 隶属度的确定

决策是在论域 $B=(b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n)$ 中进行的，即在论域 B 中的 n 个决策方案之间作优比较，与论域外的决策无关，即最优决策是相对而言的，而隶属度的计算也是相对而言的，这时，可以建立起论域 B 中的相对优决策作为优相对比较的标准。

以 $S_{ij}=(a_i, b_j)$ 表示用第 j 个策略 b_j 去对付第 i 个目标 a_i 的效果指标值，每个目标都可以用 n 个策略去对付，于是得到 $m\times n$ 个效果指标特征值 S_{ij}，即有效果指标特征值矩阵：

$$S=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ S_{m1} & S_{m2} & \cdots & S_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

1994年6月4日收稿，6月30日改回。

作者简介：吴群英，女，1961年出生，讲师，数学专业。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnk

效果指标特征值有越大越优型（如产量、产值等效益型指标）与越小越优型（如投资、费用等成本型指标）两种，效果指标特征值对于单个评价目标对于"优"的隶属度，越大越优型的隶属度公式定义如下:

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当}S_{ij}>S_{ip}\\ (S_{ij}-S_{if})\ /\ (S_{ip}-S_{if}) & \text{当}S_{if}\leqslant S_{ij}\leqslant S_{ip}\\ 0 & \text{当}S_{ij}<S_{if}\end{cases}\tag{2}$$

式中，r_{ij} 为第 j 个策略对于第 i 个目标 a_i 的效果指标隶属度；S_{ip}，S_{if} 分别表示策 i 个目标的效果指标特征值在有关实际问题中规定的上、下限，如效果指标未作上、下限规定，则可分别取全体策略该效果指标值的最大、最小值。

对越小越优型，效果指标的隶属度按 r_{ij} 的余集 r_{ij}^{c} 计算，其效果指标隶属度定义为:

$$r_{ij}=\begin{cases}0 & \text{当}S_{ij}>S_{ip}\\ (S_{ip}-S_{ij})\ /\ (S_{ip}-S_{if}) & \text{当}S_{if}\leqslant S_{ij}\leqslant S_{ip}\\ 1 & \text{当}S_{ij}<S_{if}\end{cases}\tag{3}$$

根据（2），（3）两式可将效果指标特征矩阵（1）转换为效果指标隶属度矩阵:

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn}\end{bmatrix}\tag{4}$$

这是个 Fuzzy 矩阵。

3 最优决策准则

根据上面提到的最优决策的相对性，可由矩阵（4）建立标准优等方案，作为优选比较的相对标准，由最大隶属度原理，可按下式建立优等方案$\vec{G}$。

$$\begin{aligned}\vec{G}&=(r_{11}\ V\ r_{12}\ V\ \cdots\ V\ r_{1n},\ r_{21}\ V\ r_{22}\ V\cdots\ V\ r_{2n},\cdots,\ r_{m1}\ V r_{m2}\ V\cdots V\ r_{mn})^{T}\\ &\triangleq(g_1,\ g_2\ ,\cdots,g_m)^{T}\end{aligned}\tag{5}$$

式中 V 为取大运算。

第 j 个方案可用向量式表示为:

$$\vec{R}_j=(r_{1j},r_{2j},\cdots,r_{mj})^{T}\qquad j=1,2,\cdots,n\tag{6}$$

m 个目标 a_1，a_2，$\cdots$，a_m 的权向量为 $\vec{W}=(W_1,W_2,\cdots,W_m)^{T}$

把模糊数学中的贴近度概念[2]拓广为带权的贴近度，并用它来刻划方案$\vec{R}_j$的优程度，即根据$\vec{R}_j$与优方案$\vec{G}$的带权贴近度的大小排序，可得策略$\vec{R}_j$的优排序，贴近度最大

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnk

者对应的决策b_j^*与$\overrightarrow{G}$最接近，所以b_j^*即为最优方案。

带权的贴近度可用下两种方式定义：

用带权距离定义$N(\overrightarrow{R_j},\overrightarrow{G})=1-D_w(\overrightarrow{R_j},\overrightarrow{G})$

其中$D_w(\overrightarrow{R_j},\overrightarrow{G})$表示$\overrightarrow{R_j}$与$\overrightarrow{G}$的带权距离。

如$D_w(\overrightarrow{R_j},\overrightarrow{G})$取为带权的海明距离，则为带权的海明贴近度：

$$N_H(\overrightarrow{R_j},\overrightarrow{G})=1-\Sigma_{i=1}^{m}W_i(g_i-r_{ij}) \tag{7}$$

如$D_w(\overrightarrow{R_j},\overrightarrow{G})$为带权的欧几里得距离，则为带权的欧几里得贴近度：

$$N_E(\overrightarrow{R_j},\overrightarrow{G})=1-\left[\Sigma_{i=1}^{m}W_i(g_i-r_{ij})^2\right]^{1/2}$$

用内外积法定义

$$N(\overrightarrow{R_j},\overrightarrow{G})=\frac{1}{2}[\overrightarrow{R_j}\bigcirc\overrightarrow{G}+(1-\overrightarrow{R_j}\odot\overrightarrow{G})]_w$$

$$\triangleq\frac{1}{2}\{W_1(r_{1j}\wedge g_1)\vee W_2(r_{2j}\wedge g_2)\vee\cdots\vee W_m(r_{mj}\wedge g_m)$$
$$+(1-W_1(r_{1j}\vee g_1)\wedge W_2(r_{2j}\vee g_2)\wedge\cdots\wedge W_m(r_{mj}\vee g_m))\}$$

上面 2 种带权的贴近度各有优缺点，可根据具体情况，选用合适的带权贴近度公式。

把计算得的带权贴近度由大到小排序，即得对应策略 b_j 的优排序，带权贴近度最大者对应的策略即为最优策略 b_j^*。

上面的讨论是取优等方案$\overrightarrow{G}$作为相对标准，与之相对应，也可取劣方案。

$$\overrightarrow{B}=(r_{11}\wedge r_{12}\wedge\cdots\wedge r_{1n},\cdots,r_{m1}\wedge r_{m2}\wedge\cdots\wedge r_{mn})^T\triangleq(b_1,b_2,\cdots,b_m)^T$$

作为相对标准，计算出$\overrightarrow{R_j}$与$\overrightarrow{B}$的带权贴近度，则可按计算出的带权贴近度的小大排序得出$\overrightarrow{R_j}$的优排序，带权贴近度最小者对应的策略即为最优策略 b_j^*。

4　应用实例

某单位决定对老产品进行改进,现在有 5 个策略(设计方案)，其对应于不同目标的效果指标值见附表。

单位规定：方案应满足成本不超过 10 000 元，能效在 60% 以上，无故障工作小时在 300 天以上，产品寿命 10 年以上。

由单位的实际情况规定各目标的权重为：$W=(0.4,0.2,0.3,0.1)^T$

试用 Fuzzy 决策方法确定最优策略（方案）。

成本是越小越好，所以用越小越优型确定隶属度，按上限规定取 $S_{1p}=10000$，下限无规定，取成本的最小值：$S_{1f}=4500$，由(3)式得：

$$\overrightarrow{r}_1=(0.27,\ 0.45,\ 0.55,\ 0.64,\ 1)$$

能效是越大越好，用越大越优型确定隶属度，有 $S_{2p}=100$　$S_{2f}=60$，由（2）式得

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnk

$\vec{r}_2$ = (0.75, 0.63, 0.68, 0.30, 0.25)

可靠性属越大越优型，即无故障工作小时越长越好，所以 $S_{3p}=20000$，$S_{3f}=7200$，由（2）式得:

$\vec{r}_3$ = (1, 0.61, 0.30, 0.06, 0.02)

产品寿命也是越大越优型，取 $S_{4p}=15$，$S_{4f}=10$，由（2）式得:

$\vec{r}_4$ = (0.6, 0.8, 0.6, 0.2, 0.4)

所以效果指标隶属度矩阵为:

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix} 0.27 & 0.45 & 0.55 & 0.64 & 1 \\ 0.75 & 0.63 & 0.68 & 0.30 & 0.25 \\ 1 & 0.61 & 0.30 & 0.06 & 0.02 \\ 0.6 & 0.8 & 0.6 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

由（5）式计算得:

$$\vec{G}=(1,\ 0.75,\ 1,\ 0.8)^T$$

取带权的海明贴近度（7）式计算出优方案$\vec{G}$与各方案$\vec{R}_j$的贴近度，计算结果为:

$$N_H(\vec{G},\vec{R}_1)=0.741$$

$$N_H(\vec{G},\vec{R}_2)=0.694$$

$$N_H(\vec{G},\vec{R}_3)=0.601$$

$$N_H(\vec{G},\vec{R}_4)=0.400$$

$$N_H(\vec{G},\vec{R}_5)=0.526$$

故得:

$$b_1>b_2>b_3>b_5>b_4$$

即优排序为b_1，b_2，b_3，b_5，b_4,最优方案为b_1。

本文结果与文献〔6〕用层次分析法及其他方法（如加权法、理想点法等）是一致的，最优方案都是b_1，且本文给出的方法计算量比文〔6〕小得多，从而说明本文给出的方法是有效且方便易行的。

附表 效果指标值[6]

Appendix table the effect index value

策略	成本(元)	能效(%)	可靠性 $T(h)$	产品寿命(a)
b_1	8500	90	20 000	13
b_2	7500	85	15 000	14
b_3	7000	87	11 000	13
b_4	6500	72	8 000	11
b_5	4500	70	7 500	12

表中: T 为天故障工作小时.

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnk

参 考 文 献

1 陈珽. 决策分析. 北京: 科学出版社, 1987
2 肖位枢. 模糊数学基础及应用. 北京: 航空工业出版社, 1992, 54～56
3 Zimmermann H J. Fuzzy Set Theory and its Applications. Kluwer－Nijhoff Publishing, 1985
4 孟波. 一种基于模糊推理的多目标决策方法及应用. 系统工程, 1990, (5): 39～44
5 韩文秀, 马素峰. 模糊目标规划方法及其应用. 系统工程学报, 1989, (1): 37～45
6 熊锐, 曹锟生. 多目标决策的层次分析法. 系统工程理论与实践, 1992,(6): 58～62

A PRACTICAL METHOD OF FUZZY DECISION

Wu Qunying
(Department of Basic Sciences, Guilin Institute of Technology)

Abstract

The application of fuzzy mathematics theory is made to decision analysis. As a result, the applied range of decision problem has been extended.

Key words membership degree; approaching degree; optimum selecting

我刊获广西 1994 年度优秀期刊三等奖

由广西区党委宣传部、广西区新闻出版局、广西区科委联合组织专家对全区 168 种期刊进行综合评审，共评出 48 种期刊为广西 1994 年度优秀期刊，我刊获三等奖。这是我刊自 1989 年以来第 3 次获奖。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnk