104-112

灰色降深流量(S-Q)方程及其应用

云逢明 李正吾

(桂林冶金地质学院基础学科部)

p641.7

摘要 灰色降深流量模型,较好地解决了 Rorabaugh 方程中诸参数的确定问题,对于 GM(m,n) 模型也是一个发展。在利用模型讨论白云岩含水层中井的扩大引起的降深变化时发现,参数的变化与井径的变化相当。

关键词 灰色模型;非线性/降深方程

地下水, 流量

中图分类号 O29; O241.7

0 引言

在水文地质勘察以及地下水研究中,通过抽水试验建立水位降深(S)和流量(Q)之间的经验方程,并可利用该方程讨论水资源的开发利用。这种经验方程有直线型、抛物线型、指数型、对数型等。美国 Rorabaugh (1953年)⁽¹⁾认为在抛物线型方程($S = BQ + CQ^2$)中,紊流指数不一定总是2,用n取代2,能更灵活的拟合抽水资料。Rorabaugh的方程是

$$S = BQ + CQ^n \quad (1)$$

其中,S—抽水井降深;B—岩层系数;C—井损耗系数;Q—抽水井流量;n—紊流指数

方程(1)在美国的地下水勘察中被广泛采用^{(1),(2)},但确定其中的参数B,C,n有一定困难,特别不适合于野外作业⁽¹⁾。Miller和Weber(1983年)指出了一种确定B,C,n的方法⁽²⁾,但确定n值需用到3组观测数据,因而不尽如意。本文利用灰色系统理论解决了(1)中参数的确定问题。

1 灰色降深流量模型(S-Q方程)

1.1 灰色系统GM(1,1)模型的建模思想

设 $\{X_{(k)}^{(0)}\}$ 是原始数据列, $\{X_{(k)}^{(1)}\}$ 是累加生成数据列,二者关系为:

$$X_{(k)}^{(1)} = \sum_{i=1}^k X_{(i)}^{(0)}$$
$$X_{(k)}^{(0)} = X_{(k)}^{(1)} - X_{(k-1)}^{(1)}$$

灰色微分方程是

$$dX^{(1)} / dt + aX^{(1)} = \mu$$

1993年5月12日收稿,7月8日改回。

云逢明,男,1944年出生,讲师,数学专业。

$dX^{(1)}/dt$ 在 $t=k$ 处的灰值取为 $[X_{(k)}^{(1)} - X_{(k-1)}^{(1)}] / [k - (k-1)] = X_{(k)}^{(0)}$

$X^{(1)}$ 在 $t=k$ 处的灰值取: $\frac{1}{2} [X_{(k)}^{(1)} + X_{(k-1)}^{(1)}]$ 由原始数据用最小二乘法可确定参数 a, μ :

$$[u, a]^T = (G^T G)^{-1} G^T y$$

$$\text{其中 } G = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} [X_{(2)}^{(1)} + X_{(1)}^{(1)}] \\ 1 & -\frac{1}{2} [X_{(3)}^{(1)} + X_{(2)}^{(1)}] \\ \dots & \dots \\ 1 & -\frac{1}{2} [X_{(N)}^{(1)} + X_{(N-1)}^{(1)}] \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} X_{(2)}^{(0)} \\ X_{(3)}^{(0)} \\ \dots \\ X_{(N)}^{(0)} \end{bmatrix}$$

上述GM(1,1)模型, 要求数据是等间距的, 即 $dt \equiv 1$.

在一般的抽水试验中, 流量 Q 的变化不总是等间距的, 故应把非等间距数据列化为等间距数据列. 设原始数据列为:

$$X_{(P_1)}^{(0)}, X_{(P_2)}^{(0)}, \dots, X_{(P_N)}^{(0)}$$

其中 $P_1, P_2, \dots, P_N$ 为正实数, 且 $P_1 = 2, 2 = P_1 \leq 3 \leq P_2 \leq 4 \leq P_3 \leq \dots \leq N + 1 \leq P_N$

假定 $P_1 = 2$ 是因为在建GM(1,1)模型时, $X_{(1)}^{(0)}$ 没有被利用^[3], 在建立灰色降深流量方程中 $X_{(1)}^{(0)}$ 也没有被利用, 关于这一点的证明在文章最后进行. 尽管 $X_{(1)}^{(0)}$ 的值未知, 由于未被利用而假定:

$$X_{(1)}^{(0)} = 0$$

关于 $X_{(k)}^{(0)}$ 的值(k 是正整数: $2 < k \leq P_N$), 用内插法给出:

$$X_{(k)}^{(0)} = X_{(P_{k-2})}^{(0)} + \frac{k - P_{k-2}}{P_{k-1} - P_{k-2}} [X_{(P_{k-1})}^{(0)} - X_{(P_{k-2})}^{(0)}] \quad (2)$$

因而得到一组等距的数据列, 且称为导出列:

$$X_{(1)}^{(0)}, X_{(2)}^{(0)}, X_{(3)}^{(0)}, \dots, X_{(N+1)}^{(0)} \quad (3)$$

1.2 灰色降深流量方程的建立

设有流量等级 $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$, 对应的降深观测值为 $S_1, S_2, \dots, S_N$.

由(1)得: $S/Q = B + CQ^{n-1} = B + Ce^{(n-1)\ln Q}$ 记 $T = \ln Q, X = S/Q$. 于是方程(1)可改写成: $X = B + Ce^{(n-1)T}$

设 $T_k = \ln Q_k \quad k = 1, 2, \dots, N$

改变计量 T 值的单位和计量零点, 可设 $T_1 = 2$, 设
 $2 = T_1 \leq 3 \leq T_2 \leq \dots \leq N + 1 \leq T_N$

$$\text{原始数据为 } X_{(Tk)}^{(0)} = S_k / Q_k \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

利用内插公式(2)得到导出列:

$$X_{(1)}^{(0)}, X_{(2)}^{(0)}, \dots, X_{(N+1)}^{(0)} \quad (\text{假定 } X_{(1)}^{(0)} = 0) \quad (5')$$

由导出列得到累加生成列:

$$X_{(k)}^{(1)} = \sum_{i=1}^k X_{(i)}^{(0)} \quad k = 1, 2, \dots, N+1 \quad (6)$$

据文献〔4〕, 当数据列 (5') 满足关系 (4) 时, 数据列 (6) 将满足微分方程

$$dX^{(1)}/dT = ax^{(1)} + bT + c \quad (7)$$

式 (7) 中的系数 a, b, c 可由数据 (5)、(6) 用最小二乘法求得:

$$[c, b, a]^T = (G^T G)^{-1} G^T y \quad (8)$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} [X_{(2)}^{(1)} + X_{(1)}^{(1)}] \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} [X_{(3)}^{(1)} + X_{(2)}^{(1)}] \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & N + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} [X_{(N+1)}^{(1)} + X_{(N)}^{(1)}] \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} X_{(2)}^{(0)} \\ X_{(3)}^{(0)} \\ \dots \\ X_{(N+1)}^{(0)} \end{bmatrix}$$

由 (8) 所确定的 a, b, c 的值代入方程 (7), 解之得到累加生成列的模型值:

$$\bar{X}_{(k)}^{(1)} = -\frac{b}{a}k - \frac{b+ac}{a^2} + \left(X_{(1)}^{(0)} + \frac{b}{a} + \frac{b+ac}{a^2} \right) e^{a(k-1)}$$

由关系式: $\hat{X}_{(k)}^{(0)} = \hat{X}_{(k)}^{(1)} - \hat{X}_{(k-1)}^{(1)}$ 得出导出数组的模型值 (考虑到 $X_{(1)}^{(0)} = 0$):

$$\bar{X}_{(k)}^{(0)} = -\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a} + \frac{b+ac}{a^2} \right) (1 - e^{-a}) e^{a(k-1)} \quad (9)$$

数组 (5) 的模型值也可由式 (9) 给出:

$$\bar{X}_{(T)}^{(0)} = -\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a} + \frac{b+ac}{a^2} \right) (1 - e^{-a}) e^{a(T-1)} \quad (10)$$

由于 $X_{(T)}^{(0)} = S/Q$, $T = \ln Q$ 代入 (10) 式得到

$$S/Q = -\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a} + \frac{b+ac}{a^2} \right) (1 - e^{-a}) e^{a(\ln Q - 1)}$$

$$\text{则} \quad S = -\frac{b}{a}Q + \left(\frac{b}{a} + \frac{b+ac}{a^2} \right) (1 - e^{-a}) e^{-a} \cdot Q^{Ha} \quad (11)$$

将式 (11) 与式 (1) 对照, 可知式 (1) 中的诸系数 B, c, n 与由式 (8) 所确定的 a, b, c 之间的关系为:

$$B = -\frac{b}{a}, \quad c = \left(\frac{b}{a} + \frac{b+ac}{a^2} \right) (1 - e^{-a}) \cdot e^{-a}, \quad n = 1 + a \quad (12)$$

假定 $T_i = 2$, 得到式 (12), 这里其实是改变了计量 T 值的零点和度量单位, 所以用式 (12) 计算式 (1) 中的参数是错误的。在通常情况下, 计算式 (1) 系数应该如下进行:

设 $T_i = \ln Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$.

改变度量单位和计量零点后, 与 T_i 对应的值是 P_i 。设新的度量单位为 λ , 零点位置在新单位下移动 X_0 , 所以有

$$P_i = X_0 + T_i / \lambda$$

因为 T_i 对应于 2, 即 $P_i = 2$, 代入上式得到

$$X_a = 2 - T_1 / \lambda$$

所以计算 P_i 的公式为:

$$P_i = T_i / \lambda + 2 - T_1 / \lambda = 2 + (T_i - T_1) / \lambda \quad (13)$$

式(10)是在 $T_i = P_i$ 的情况下计算 $X_{(T)}^{(0)}$ 的公式, 一般情况下应为

$$X_{(T)}^{(0)} = -\frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a} + \frac{b+ac}{a^2} \right) (1 - e^{-a}) e^{a \left(2 + \frac{T-T_1}{\lambda} \right) - 1} \quad (14)$$

把 $X_{(T)}^{(0)} = S/Q$, $T = \ln Q$ 代入上式得到

$$S = -\frac{b}{a} Q + \left(\frac{b}{a} + \frac{b+ac}{a^2} \right) (1 - e^{-a}) e^{a - \frac{aT_1}{\lambda}} \cdot Q^{1 + \frac{a}{\lambda}} \quad (15)$$

将式(15)与式(1)对照有:

$$B = -\frac{b}{a}, \quad C = \left(\frac{b}{a} + \frac{b+ac}{a^2} \right) (1 - e^{-a}) e^{a - \frac{aT_1}{\lambda}}, \quad n = \frac{a}{\lambda} + 1 \quad (16)$$

2 灰色降深流量(S-Q)方程的应用

利用文(1)所提供的一口在白云岩含水层中井的两个阶段降深试验的资料(即在井径从25厘米扩大到30厘米的前后两次的试验, 试验数据见表1)说明灰色S-Q方程的建模过程, 并利用所建模型讨论扩井引起的降深变化。

表1 阶段降深试验资料

Table 1 Data experience of step drawdown

	流量 $Q(m^3/s)$	降 $S(m)$		流量 $Q(m^3/s)$	降 $S(m)$
扩	0.99	7.27	扩	0.66	3.75
井	1.34	10.70	井	1.10	6.67
前	1.68	15.00	后	1.88	11.24
	2.01	20.05		2.15	15.9
				2.85	23.15

2.1 扩井前灰色S-Q方程

$$\text{令 } T_1 = \ln Q_1 = \ln 0.99 = -0.01$$

$$\text{同理 } T_2 = 0.29, T_3 = 0.52, T_4 = 0.70$$

设 $\lambda = 0.18$, 以 λ 为单位1. 由式(13)得

$$P_0 = 1, P_1 = 2 \quad \text{则 } P_2 = 2 + \frac{T_2 - T_1}{\lambda} = 3.67, P_3 = 4.94, P_4 = 5.94$$

$$\text{令 } X_{(1)}^{(0)} = X_{(P_0)}^{(0)} = 0$$

则有

$$X_{(2)}^{(0)} = X_{(P_1)}^{(0)} = S_1 / Q_1 = \frac{7.27}{0.99} = 7.34; \quad X_{(P_2)}^{(0)} = 7.99, \quad X_{(P_3)}^{(0)} = 8.93, \quad X_{(P_4)}^{(0)} = 9.98 \quad (17)$$

数组(17)是原始数组. (17)导出组由式(2)给出:

$$X_{(3)}^{(0)} = X_{(P_1)}^{(0)} + \frac{3 - P_1}{P_2 - P_1} [X_{(P_2)}^{(0)} - X_{(P_1)}^{(0)}] = X_{(2)}^{(0)} + \frac{3 - 2}{3.67 - 2} [X_{(3.67)}^{(0)} - X_{(2)}^{(0)}] = 7.73$$

$$\text{同理 } X_{(4)}^{(0)} = 8.23, X_{(5)}^{(0)} = 8.99$$

这样导出组为:

$$X_{(1)}^{(0)} = 0, X_{(2)}^{(0)} = 7.34, X_{(3)}^{(0)} = 7.73, X_{(4)}^{(0)} = 8.23, X_{(5)}^{(0)} = 8.99$$

由导出组产生的累加生成列为:

$$X_{(1)}^{(1)} = 0, X_{(2)}^{(1)} = 7.34, X_{(3)}^{(1)} = 15.07, X_{(4)}^{(1)} = 23.30, X_{(5)}^{(1)} = 32.29$$

所以矩阵G和y(见式(18))为

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 3.67 \\ 1 & 2.5 & 11.205 \\ 1 & 3.5 & 19.185 \\ 1 & 4.5 & 27.795 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 7.34 \\ 7.73 \\ 8.23 \\ 8.999 \end{bmatrix}$$

$$\text{由 } [c, b, a]^T = (G^T G)^{-1} G^T y$$

求得 $a = 0.347, b = -2.243, c = 9.436$

因为 $\lambda = 0.18$, 所以由式(16)得到式(1)的诸参数:

$$B = 6.46, c = 0.89, n = 2.93$$

灰色S-Q方程为

$$S = 6.46Q + 0.89Q^{2.93} \quad (18)$$

利用方程(18)模拟抽水试验结果如下:

$$\begin{cases} Q_1 = 0.99 \\ \hat{S}_1 = 7.26 \end{cases}, \begin{cases} Q_2 = 1.34 \\ \hat{S}_2 = 10.75 \end{cases}, \begin{cases} Q_3 = 1.68 \\ \hat{S}_3 = 14.92 \end{cases}, \begin{cases} Q_4 = 2.01 \\ \hat{S}_4 = 19.88 \end{cases}$$

对照表1, 拟合较好。

2.2 扩井后灰色S-Q方程:

$$T_1 = \ln Q = \ln 0.66 = -0.42, T_2 = 0.10, T_3 = 0.52, T_4 = 0.76, T_5 = 1.04$$

改变度量单位和零点位置, 取 $\lambda = 0.35$, 得出

$$P_0 = 1, P_1 = 2, P_2 = 3.46, P_3 = 4.67, P_4 = 5.37, P_5 = 6.15$$

$$\text{对应的 } X_{(P_i)}^{(0)} \text{ 为: } X_{(P_0)}^{(0)} = 0, X_{(P_1)}^{(0)} = S_1 / Q_1 = 5.68$$

$$\text{同理 } X_{(P_2)}^{(0)} = 6.06, X_{(P_3)}^{(0)} = 6.69, X_{(P_4)}^{(0)} = 7.40, X_{(P_5)}^{(0)} = 8.21$$

由内插法得到导出组

$$X_{(1)}^{(0)} = 0, X_{(2)}^{(0)} = 5.68, X_{(3)}^{(0)} = 5.94, X_{(4)}^{(0)} = 6.34, X_{(5)}^{(0)} = 7.02, X_{(6)}^{(0)} = 8.05$$

由导出组产生的累加生成列为:

$$X_{(1)}^{(1)} = 0, X_{(2)}^{(1)} = 5.68, X_{(3)}^{(1)} = 11.62$$

$$X_{(4)}^{(1)} = 17.96, X_{(5)}^{(1)} = 24.98, X_{(6)}^{(1)} = 33.03$$

利用公式(8)求得:

$$a = 0.455, \quad b = -2.38, \quad c = 7.957$$

连同 $\lambda = 0.35$ 代入式(16), 式(1)中的参数为

$$B = 5.23, \quad c = 0.75, \quad n = 2.30$$

故灰色 S-Q 方程为:

$$S = 5.23Q + 0.75Q^{2.30} \quad (19)$$

用方程(19)模拟扩井后的抽水试验结果如下:

$$\begin{cases} Q_1 = 0.66 \\ \hat{S}_1 = 3.74 \end{cases}, \begin{cases} Q_2 = 1.10 \\ \hat{S}_2 = 6.69 \end{cases}, \begin{cases} Q_3 = 1.68 \\ \hat{S}_3 = 11.26 \end{cases}, \begin{cases} Q_4 = 2.15 \\ \hat{S}_4 = 15.61 \end{cases}, \begin{cases} Q_5 = 2.15 \\ \hat{S}_5 = 22.89 \end{cases}$$

与表1对照, 拟合也较好。

2.3 S-Q 方程的应用

利用 S-Q 方程(18)和(19), 扩井可以显著的节约用井期间的动力成本。事实上在抽水速率相同的条件(流量均为 Q), 扩井前后降深值 S_1, S_2 的差为

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 &= (6.46Q + 0.89Q^{2.93}) - (5.24Q + 0.75Q^{2.30}) \\ &= 1.22Q + 0.89Q^{2.93} - 0.75Q^{2.30} \end{aligned}$$

用数学方法容易证明 $S_1 - S_2$ 是 $Q (Q > 0)$ 的增函数, 因此无论怎样的抽水速率, 扩井前的降深值均大于扩井后的降深值。可见流量越大, 扩井的优越性越明显。

对于选定的抽水速率, 按方程(18)、(19)计算扩井前后井损耗引起的降深值。扩井前井损耗引起的降深为 $0.89Q^{2.93}$, 扩井后井损耗引起的降深为 $0.75Q^{2.30}$ 。其计算结果(表2)与文〔1〕的结论相同。

有意义的是, 对比扩井前后的 S-Q 方程(18)、(19), 可以发现3个参数值, 岩层系数、井损耗常数和紊流指数在扩井后都有同量级的变化, 均减少20%左右(B值减少19%; c值减少16%; n值减少22%), 这一值恰好是井径扩大的百分数。

表2 扩井前后井损耗引起的降深值
Table 2 Drawdown value well loss before and after extending for well

流量 Q (m ³ /s)	井损耗引起的降深(m)	
	前	后
0.45	0.09	0.12
0.67	0.28	0.30
0.89	0.63	0.57
1.11	1.21	0.95
1.67	4.00	2.44
2.23	9.33	4.74
3.34	30.48	12.01

3 关于 $X_{(1)}^{(0)}$ 可任意取值的证明

文〔3〕证明在 GM(1,1) 建模中, $X_{(1)}^{(0)}$ 的值对模型值以及预测精度不产生任何影响, 因而可在原始数列的第一个数据前再增加一个任意数作为新的原始数列建模。但文〔3〕所用的证明方法比较繁难, 下面将用另外的方法证明建立灰色 S-Q 模型时, $X_{(1)}^{(0)}$ 也有同样的性质。

设有原始数据列:

$$X_{(1)}^{(0)}, X_{(2)}^{(0)}, \dots, X_{(N)}^{(0)} \quad (*)$$

作累加生成列

$$X_{(k)}^{(1)} = \sum_{i=1}^k X_{(i)}^{(0)} \quad k=1,2,\dots,N. \quad (\ast\ast)$$

建立灰色S-Q方程, 由式(8)有

$$[c, b, a]^T = (G^T G)^{-1} G^T y$$

又设另有原始数列

$$X_{(1)}^{(0)} + X_0, X_{(2)}^{(0)}, \dots, X_{(N)}^{(0)} \quad (\ast')$$

(\ast) 与 (\ast') 之间的区别仅在于第一个数据. 由 (\ast') 作累加生成列

$$\bar{X}_{(k)}^{(1)} = \left(X_{(1)}^{(0)} + X_0 \right) + X_{(2)}^{(0)} + \dots + X_{(k)}^{(0)} \\ k=1,2,3,\dots,N \quad (\ast\ast')$$

显然有 $\bar{X}_{(k)}^{(1)} = X_{(k)}^{(1)} + X_0$

用数据 (\ast') 建立灰色S-Q方程, 有

$$[c', b', a']^T = (G_1^T G_1)^{-1} G_1^T y_1$$

$$\text{其中 } G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} [\bar{X}_{(2)}^{(1)} + \bar{X}_{(1)}^{(1)}] \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} [\bar{X}_{(3)}^{(1)} + \bar{X}_{(2)}^{(1)}] \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & N - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} [\bar{X}_{(N)}^{(1)} + \bar{X}_{(N-1)}^{(1)}] \end{bmatrix}, \quad y_1 = \begin{bmatrix} X_{(2)}^{(0)} \\ X_{(3)}^{(0)} \\ \dots \\ X_{(N)}^{(0)} \end{bmatrix}$$

可见, $y_1 = y$. 由于 $\bar{X}_{(k)}^{(1)} = X_{(k)}^{(1)} + X_0$, 所以

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} [X_{(2)}^{(1)} + X_{(1)}^{(1)}] + X_0 \\ 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} [X_{(3)}^{(1)} + X_{(2)}^{(1)}] + X_0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & N - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} [X_{(N)}^{(1)} + X_{(N-1)}^{(1)}] + X_0 \end{bmatrix} = G \cdot R$$

$$\text{其中 } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & X_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因而 $G_1^T G_1 = (GR)^T (GR) = R^T G^T GR$

$$(G_1^T G_1)^{-1} = R^{-1} (G^T G)^{-1} (R^T)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } [c', b', a']^T &= R^{-1}(G^T G)^{-1}(R^T)^{-1} \cdot R^T G^T y \\ &= R^{-1}[(G^T G)^{-1} G^T y] = R^{-1}[c, b, a]^T \end{aligned}$$

$$\text{而 } R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -X_0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

推出

$$\begin{bmatrix} c' \\ b' \\ a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c - aX_0 \\ b \\ a \end{bmatrix}$$

即

$$a' = a, b' = b, c' = c - aX_0 \quad (20)$$

据文(4), 用数据(※)建模, 模型值为

$$\hat{X}_{(k)}^{(0)} = -\frac{b}{a} + \left[X_{(1)}^{(0)} + \frac{b}{a} + \frac{b+ac}{a^2} \right] (1 - e^{-a}) e^{a(k-1)}$$

用数据(※')建模, 模型值为

$$\hat{X}_{(k)}^{(0)} = -\frac{b'}{a'} + \left[\left(X_{(1)}^{(0)} + X_0 \right) + \frac{b'}{a'} + \frac{b' + a'c'}{a'^2} \right] (1 - e^{-a'}) e^{a'(k-1)}$$

由关系(20)得

$$\begin{aligned} \hat{X}_{1(k)}^{(0)} &= -\frac{b}{a} + \left[X_{(1)}^{(0)} + X_0 + \frac{b}{a} + \frac{b + a(c - aX_0)}{a^2} \right] (1 - e^{-a}) e^{a(k-1)} \\ &= -\frac{b}{a} + \left[X_{(1)}^{(0)} + \frac{b}{a} + \frac{b+ac}{a^2} \right] (1 - e^{-a}) e^{a(k-1)} \end{aligned}$$

所以 $\bar{X}_{1(k)}^{(0)} = \bar{X}_{(k)}^{(0)}$

即用数列(※)与用数列(※')建模, 模型值相等。这就证明了 $X_{(1)}^{(0)}$ 可任意取值。

参 考 文 献

- 1 Novis S. E., 程俊贤译. 白云岩含水层中井的扩大引起降深变化. 国外地质, 1977 (12): 44-46.
- 2 Miller C. T., Weber W. J., Rapid Solution of the Nonlinear Drawdown Equation, Ground Water, 1983, 21(5)
- 3 李留藏等. 灰色系统 GM(1,1)模型的讨论. 数学的实践与认识, 1993, (1)
- 4 李正吾. 灰色逻辑曲线模型的建立和应用. 数学的实践与认识, 1993, (1)

GREY DRAWDOWN DISCHARGE EQUATION AND ITS APPLICATION

Yun Fengming Li Zhengwu

(Department of Basic Sciences, Guilin College of Geology)

Abstract

The drawdown discharge grey model better solves fixing parameters in Rorabargh-drawdown equation, and extends GM(m,n)-model. When the model is applied to study the variation in drawdown for extending well in dolomite aquifer, the variation of parameters will correspond with the variation of well diameter.

Key words gray models; non-linear / drawdown equation

欢迎订阅 《中国观赏石》

1994年4月出版 袁奎荣 邹进福等编著

“因无石不秀，斋无石不雅。”观赏石是“立体的画”，“无声的诗”。

近几年来，不断升温的观赏石热正以极大的魅力吸引看大批藏石家和数以十万计的观赏石爱好者。观赏石的商业价值也正开始为人们所认识。但迄今为止，国内尚无一本完整的观赏石综合论著，《中国观赏石》一书的出版，填补了这一空白。她将为您展现融科学性与文化艺术性于一体，由天然形成的具有观赏、玩味、陈列和收藏价值的各种奇、稀、美石体详尽的科学记述。

该书系统介绍与阐述了国内130种造型石、纹理石、矿物晶体、化石、事件石、纪念石及文房石等的基本知识；各种观赏石的基本特征、品种、品级、产状、产地及商业价值；观赏石的采集、加工、收藏及真伪鉴别方法；国内外观赏石的贸易特点、市场信息，市场预测及研究动态。全书附有彩照71张，插图70幅，可供读者核对，鉴赏及美的享受。本书是从事观赏石贸易不可缺少的工具书。

该书由中国文联主席、著名剧作家曹禺先生题写书名。

读者对象：观赏石研究者、爱好者、收藏者；从事观赏石贸易的商业工作者及鉴定人员；大专院校相关专业的师生及各种观赏石培训班的学员。

全书约33万字，16开本，约210页，精装本定价：30元；平装本定价：26元。

出版单位：北京工业大学出版社 **特约编辑：**桂林冶金地质学院学报编辑部罗献林

欲订购该书者，请向桂林冶金地质学院学报编辑部索取订单。

北京工业大学出版社