第13卷 第4期
1993年11月
桂林冶金地质学院学报
JOURNAL OF GUILIN COLLEGE OF GEOLOGY
Vol.13,No 4
Nov. 1993

地球科学中分形几何的应用

沈忠民 冯祖钧①
(南京大学地球科学系，21008)

0 前 言

当代科学发展的趋势之一就是要把研究对象的概念以及其本身的特征定量化、几何化，没有这种定量化和几何化是难以深刻地揭示自然现象的本质，从中找寻出规律来。长期以来，由于地球科学研究对象本身的复杂性，对一些复杂的地学现象以及现象在空间上表现出来的"非规则"形体，一直都没能找到一种具有普适意义上的手段和方法去定量地描述它们，而是依靠自然语言去形象化的定性描述，这些在某种程度上阻碍了学科的进展。正当我们面对这些现象显得一筹莫展时，分形几何以它丰富的内涵和多彩的丰姿与它的创立者曼德尔布罗特（B.B.Mandelbrot）一起步入科学的殿堂，尔后被广泛应用于众多领域[1]，给各门学科都带来了新的生机。地球科学也不例外，过去看似难以解释的现象和难以解决的问题，现在均有了分形研究的新成果，支离破碎的几何碎片成为具有深刻内涵的有序图形，看似随机偶然的地学现象，展示了本质上的内在必然，使地球科学工作者在错综复杂的地学现象中能更进一步辩清扑朔迷离。在短短的几年时间里，分形几何在地球科学中的应用已成为一个新的热点，并且在地球科学的各个学科领域都取得了不少的认识和成果。

本文旨在介绍分形几何及其在地球科学中的应用成果，以引起更多的地学工作者对分形几何的关注与兴趣，愿分形几何在地球科学中有更深入和更广泛的应用。

1 分形几何的一般概念

分形几何(Fractal Geometry)是由法国当代数学家曼德尔布罗特(B. B. Mandelbrot)创立的一门研究各种极不规则图形的几何学。Mandelbrot根据拉丁形容词"fractus"（意即破碎的），与英文中的fraction及fracture的词根，在1975年铸造了这个字"fractal"[2]，按照其本人的解释是不规律的或支离破碎的意思。因为曼德尔布罗特一开始讨论的就是不规则形状与过程的性质，如海岸线、瑞士乳酪中的孔穴、湍流、云、星团，甚至经济学和语言学中的不规则现象。从这些不规则的形状和现象的研究中创立了分形几何，并由此而获得1985年的Barnard奖章。

分形几何研究的是分形图形，描述这些图形的一个重要参数是分形维数（fractal dimension），通常简称为分维。分数维即维数不仅能取整数并且能连续变化可取分数的维

①1992年10月12日收稿。
第一作者简介：沈忠民，男，1954年出生，硕士，讲师，现攻读博士学位，矿床学专业。

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

数，这一概念最早是由 Hausdorff (1919) 提出，随后就被束之高阁，是 Mandelbrot 将其扩展应用到分形几何上。在分形几何中维数不再限在整数上，这对经典的几何来说是难以置信的，然而在数学上和自然界中却实实在在地可以找到大量的具有这种性质的图形和现象。例如，著名的三分 Cantor 集合、Von koch 曲线和雪花、Siepinski "地毯"和"海绵"、Weierstrass 函数、Peano 曲线等数学上的分形几何体都具有非整数维的分维数；自然界中海岸线的长，人肺、蝙蝠翅膀的血管直径分布等也是具有分维性质的分形体[3,4]。分维有不同的形式和定义，现介绍以下几种。

1.1 Hausdorff-Besicovitch 维数

设 $F\subset R^n$，$S\geqslant 0$，对于 $0<\delta$，定义

$$H_\delta^S(F)=\inf\sum_{i=1}^{\infty}|Ui|^S,\quad (F\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}Ui,|Ui|\leqslant\delta)$$

其中|Ui|表示Ui的直径。定义

$$H^S(F)=\lim_{\delta\to 0}H_\delta^S(F)$$

则 $H^S(F)$称为集合 F 的 Hausdorff S 维测度。后来，Besicovitch 证明，对任何 F，就有一个 D，当 $S<D$ 时，使得 F 的 S 测度无限；当 $S>D$ 时，等于零；这个 D 就是 F 的 Hausdorff-Besicovitch 维数，它至少与 F 的拓扑维数一样大。

1.2 Box dimension (Box-counting) 维数

设 F 是 R^n 上任意非空有界子集，$N_\delta(F)$是直径最大为 δ，可以覆盖 F 的集的最少个数，则 F 的下，上计盒维数分别定义为

$$\underline{\dim}_B F=\lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$$

和

$$\overline{\dim}_B F=\overline{\lim_{\delta\to 0}}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$$

如果$\underline{\dim}_B F=\overline{\dim}_B F$则称这共同的值为盒维数，或计盒维数，记为

$$D_0=\dim_B F=\lim_{\delta\to 0}\frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$$

此又称为容量维、熵维数、Kolomogorov 维数。

1.3 信息维

在盒维数中考虑了所需 δ 球的数目，而对每个球覆盖点数的多少没有注意到，于是从概率的角度定义了信息维

$$D_1=-\lim_{\delta\to 0}\left[\sum_{i=1}^{N}P_i\ln(1/P^i)\right]/\ln\delta$$

式中 P_i 是一个点落在第 i 个球中的概率。取 $P_i=1/N$ 时 $D_0=D_1$，可见信息维比盒维数更具一般性。

关于维数的定义很多，如相似维数、Renyi 维数、关联维数等可参阅文献〔4,5〕。

分形几何学研究的分形图形大都是具有自相似性不规则曲线和具有自仿射性的几何图形。从线性与非线性上去划分，又可把分形几何划分为线性分形与非线性分形。从目前来

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

看，研究和应用的主体仍然是线性分形，这种分形具有鲜明的自相似性，这种自相似性表现在分形几何体的局部是整体形态的一个复制体，这种复制体的形态与整体形态的一致性不随观察尺度的变化而变化，此称为标度不变性，标度不变性是分形几何体的一个十分重要的特征。

2 分形与地球物理学

分形在地球物理学中应用最为活跃的领域，就是对地震活动的研究。地震活动的预报是地球物理学的一个难题，它涉及的因素很多。但是自分形几何学在研究地震现象的应用中，发现地震分布，能量等各方面都具有标度的不变性。伊东敬祐把地震标度不变性归纳为 5 个方面、第 1 个标度不变的现象就是古登堡-里克特（Gutenbery-Richter）公式 $\log N(m>M)=a-bM$。由于震级 M 与地震能量之间有关系 $M\propto 2/3\log E$，有幂次定律 $N(m>M)\propto E^{(-2/3)b}$ 成立。这里要说明，一般来说如果幂次律得到满足。就能说是分数维；第 2 个标度的不变性是地震大小与发生该地震断层大小之间的关系，即 L 所共知的 $E\propto L^3$（其中 L 为地震断层长度）；第 3 个标度不变性是关于余震频度的大森公式 $Pr\propto (t+c)^{-p}$；第 4 个标度不变性是地震的空间分布，即发现两个震源之间距离 r 分布的标度范围遵从 $N(r<R)\propto R^{-b}$ 的幂次定律；第 5 个标度不变性是以频率的尺度观察地震活动的情况，即地震波的振幅谱在一定频率范围内可用 $A(w)\propto W^{-R}$ 的幂次律表达。分形的精髓就是标度的不变性，因此地震标度不变性反过来印证了其具有分形特征。有关地震中的分形研究的详情，可参阅文献[6～10]。

地震的结果是破裂，产生地震的机制大多为断层活动所致。因此，研究断层和岩石的破裂也是一个重要的分形应用课题。对断层的分维研究是从 C. Aviles (1987)对圣安德烈斯(San andres)断层开始的[11]，继之，这种研究延伸到岩石中微破裂标度的范围内，从而寻找断层、破裂与地震活动之间的关系[12,13]。

在地球物理学中分形理论被用于对地震波传播通过非均匀介质进行分析[14]。Turcotte 的研究证明地球的地形起伏和大地水准面异常本身也是一种分形，其分维为 $D=\frac{5-\beta}{2}$ 此与 Mandelbrot 给出的时间序列，能量谱密度 S(f)对频率成幂次律关系：$S(f)\propto f^{-\beta}$，有着同样的分维式。已有的研究表明，大地水准面的分维 $D=0.75$，对应的 $\beta=3.5$，这和著名的 Kaula 律是一致的[15]。

3 分形与石油地质学

若将粘性小的流体去驱动高粘流体，粘性小的流体呈树枝状侵入的现象称为粘性指进(Viscous fingure)。这一问题与石油的采油率有重要关系，过去粘性指进现象的研究，基本上是定性研究，分形应用后开辟了新的定量途径。据报道，在 2 块玻璃板之间填满高分子水溶液，若从任何一处把水注入进去，就能观察到粘性指进现象的形成过程，并且该实验的结果求得粘性指进分数维为 1.4～1.7 左右。文献〔16〕给出了分数维 $D=1.70\pm 0.05$ 的两个粘性指进图形。

多孔介质的结构特征的研究也是石油地质中的一个重要课题。石油勘探，油气运移，油气储集的研究都必须研究岩石的孔隙结构。就目前石油盆地的计算机的模拟而言，如果

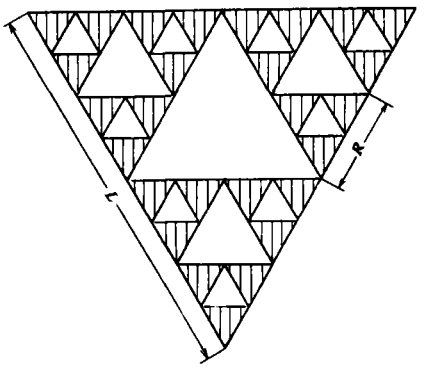
(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

岩石压实的孔隙度不能正确给定，那么模拟结果的正确性和可信度也随之降低。在分形几何用于多孔介质的研究中，Bale 和 Schmidt 等人（1984）的研究表明了多孔介质的微观孔隙结构具有分维特性；Katz 和 Thompson（1985）使用扫描电镜自动化测量方法对 Coconino 砂岩进行研究结果表明其分形维数 $D=2.78$ [16]；日本学者井波夫在寻找粒度与孔隙度的关系时，发现结晶质石灰岩当粒晶 0.3 mm 以上时，孔隙度 φ 与粒径 d 满足幂次律 $\varphi=0.215d^{0.835}$ [17]；Po-zen Wong 和 Jar-shyong Lin（1988）用小角度散射研究了多孔介质亚颗粒长度标度的分形几何特征 [18]。文献〔19〕给出了一个用 Sierpinski 地毯模拟计算孔隙度的公式

$$\phi=C(L/R)^{D-3}=C(R/L)^3(L/R)^D$$

其中 L 和 R 由图 1 所示。另外，等球堆积的多孔介质孔隙度分布的分维数在等球条件下 $D=2.55$，非等球堆积的多孔介质孔隙度的分布为一与积分形式相关的表达式。

为了估计墨西哥 i 级油田数目 N_i，Drew 等人（1982）使用关系式 $N_{i-1}=1.67N_i$，由于 i 级油田的体积是两个大于 $i-1$ 级油田体积的一个因子，其等价于一个分形分布，并有分维数 $D=2.22$。



附图 Sierpinski 地毯

4 分形与构造地质学

前已提到地球物理学家在研究地震时，已注意到了对断层和岩石破裂现象的研究。Takayuki Hirata [14] 研究了日本断层系的分维在不同标度下岩石破裂几何形状的分形结构，结果表明在 2～20km 标度范围内，断层破裂显示出较好的统计自相似性。大野博之也从岩体破裂系入手研究了破裂的分数维 [20]，谢和平 [21] 研究了大理岩微观断裂的分形模型，建立了穿晶与沿晶以及穿晶与沿晶相偶合的微观断裂的分形模型。。下表给出断层系和岩石破裂的分维值 [22]。

附表 岩石破裂几何形状的分维值

项目	分维值
日本断层系	$1.05\leqslant D\leqslant 1.60$
圣安德烈斯断层	$1.1\leqslant D\leqslant 1.5$
北伊豆断层群	$D=1.49$
尤卡山的破裂网格	$1.12<D<1.16$
10^{-1} 米级的断裂几何	$1.4<D<1.6$
天然岩石表面地形	$1\leqslant D\leqslant 1.68$

Charles G. Sammis 和 Ronald L. Biegel 研究了断层泥，指出在 5μm 至 40 cm 的断层泥粒径分布中 5 μm 到 1 cm 段，断层泥具有自相似性，分维值约为 2.60 ± 0.11；而 J. P. Chiles 使用分形和地质统计学方法模拟了断裂网络 [23]。国内学者研究了鲜水河断裂带的分维 $D_0=1.15$，红河断裂带的分维数 $D_0=1.43$，并且指出剪切断裂带具有较低的分维值，，张性断裂带分维值较高。海原断层的的研究表明其总体分维数为 1.137，其 4 个分段的分维值分别为 1.031，

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1.182，1.028。

分形在构造地质上的研究表明，无论是发生在地壳层圈浅层次脆性变形，还是发生在地壳层圈中层次过渡变形；或是发生在地壳层圈的深层次韧性流动变形，从超显微尺度到板块边界，同一构造类型在不同尺度上具有自相似[24]。板块边界形状也具有分形结构，如太平洋板块的分维为 1.17，印度板块的分维为 1.43[15]。

在节理粗糙度 JRC(Joint Roughness Coefficient) 的研究中，Barr 给出了分形维数与标准 JRC 的对应关系的经验公式[19]，通过分维值的确定来估测 JRC 的值。

5 矿床地质数据与分形

矿床储量的大小是和其品位值大小有密切的关系。Turcotte (1986) 用重整化群的方法研究了吨位与品位之间的关系，并证明了如果 M 为具有平均品位 $\bar{C}$ 的矿物吨位，则有下式成立：$\bar{C} \propto M^{-D/3}$，其分布就是一个分形。并给出了美国汞矿储量的分维 $D=2.01$，铀矿储量分维 $D=1.48$，铜矿为 $D=1.16$[25]。对华南有色金属矿产储量与品位关系的研究表明，矿床储量 t 与平均品位 g 之间服从幂次律关系[17] 即；$t=Cg^{A}$。对新疆某金矿品位分布的分数维结构特征的研究结果表明，金品位的分布符合幂次律：$N(r) \propto r^{-D}$，(其中 r 为金矿品位，$N(r)$ 表示金品位大于 r 的样品个数，D 为分数维值)①

国内学者在地质数据的分形结构研究中的空间序列数据为基础建立了相空间，根据关联函数探讨了地质数据的分形结构[26]，并对云南某幅 1∶5 万水系沉积物地球化学数据进行了分维计算，讨论了 Cu，Pb 在空间上分布的分维数特征。采用 R/S 分析对地球化学数据进行处理，文献〔27〕给出了一个实际使用的例子，该例中对云南某地的 Sn 元素的沉积物地球化学测量数据的行分维和列分维进行计算，结果 Sn 元素的沉积物地球化学测量数据的总体分维为 $A=1.1395$，$B=1.806$。也有人采用分形变异函数，用方位-分维估值法对地球化学数据进行研究，同时将其与地质统计学中的克立格法进行对比[28]。Fluegeman 和 Snow 却另辟蹊径利用 R/S 分析对太平洋岩心 $V_{28\sim239}$ 的氧同位素数据进行研究，结果表明氧同位素曲线分维值为 1.22，人们认为这个值表述的正是 δO^{18} 比率所代表的近二百万年全球气候变化的特征[14]。

6 矿物学岩石学和分形

Shechtman 等 (1984) 在淬火的含 14%Mn 的铝合金中。发现了一种具有长程有序和没有平移对称的新相，这种新相被称为准晶体。此后在矿物学，结晶学中展开了准晶体的研究。将分形应用到准晶体上，应首推我国彭志忠教授，同时彭志忠教授也是我国第 1 位将分形应用于地质学的科学家。1985 年，他就提出准晶体态的模型——微粒分数维结构模型，即准晶体具有一种微粒结构，是以廿面体为基础，以黄金中值为自拟比例因子的分数维结构。这种分数维结构严格有序，根据其规律可以推导出整个准晶体的原子结构[29]。后来，沈步明等[30] 研究了 8 次对称准晶体的分数维结构，并确定其分维数

①沈步明.第2届全国分形理论及其应用学术讨论会文集. 1991

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$D=\frac{\log 11}{\log(1+\sqrt{2})}=2.7206\cdots$$

这比5次对称准晶体的分维数 $D=2.6652$ 大些，表明 D 值的大小实质上反映了准晶体空间堆积密度的大小，也意味着稳定性的增加。

Anthony D. Fowler [31] 在研究火成岩的自组织矿物结构时采用分形方法，研究结果表明硅酸盐矿物生长在非平衡条件下通常具有相似分支谱系的形态，是分形几何体，并且是在宏观标度上的自组织结构。毕先梅在研究岩浆快冷结晶作用形成的特征后，指出玻镁安山岩中的枝晶的分维数大约为 $D=\ln 19/\ln 3\approx 2.68$①，枝晶是结晶态的中间态，它具有分形特征的程度反映了体系离开平衡态的远近程度。

7 讨论与展望

Mandelbrot 曾写到"科学家发现他们以前必须称为粒状、流体状、树枝状、海草状、奇异状、紊乱状、弯曲状、波形状、束状、折皱状等不少形状从今后能以严格的和强有力的定量方法加以处理，对此他们将会惊喜不已"。对照地质学中常用的描述术语，如星染状、条带状、透镜状、放射状等，无疑地学工作者应首先感到欣喜，分形已有的应用事实表明了这种定量化的理论和方法在地球科学中的重要性和应用前景。分形用仅含少数参数的简单公式去深刻揭示了现象或地质对象在空间上量的分布特征，从应用的广泛性来看，正好反映了分形在刻画地学现象或对象上所具有的普适性。量上的精确刻画带来的是对内在规律认识上的深化。分形在地学中的意义还在于它为认识地学现象的高度有序与完全无序之间的中间过程或状态提供了可能。笔者认为这种中间过程或状态在空间上的表象特征就是分形，换句话说，这种分形现象正是某种非线性的动力学地质过程留下的印迹（如海岸、地层断层等）。分形几何为地球科学提供了一种描述自然的崭新定量语言，同时带来的也是一种新的认识自然现象的科学思想。在不同标度上对研究对象表现出的共性（分形性质）的认识，对于以"固定论"在不变的尺度上去认识，无疑是一种更新、更深刻、更能揭示地学现象本质的更有力的研究工具和科学思想。

分形在地球科学中的应用可以说是刚刚起步，许多领域有待去开拓，创新。相信，借助于这一思想和理论并与非线性科学的混沌理论，耗散结构理论、协同学等有机地交融在一起并紧密地结合地学实际，一定能推进地球科学的认识和发展。

参 考 文 献

1 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. Freeman, san Francisco, 1982

2 詹姆斯。格莱克，混沌开创新科学。上海译文出版社，1990，105

3 高安秀树，分数维，北京：地震出版社，1989

4 谢和平。线性分形及在物理学中的应用。自然杂志，1989，12 (6)

①毕先梅. 第2届全国分形理论及其应用学术讨论会文集, 1991

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

5 肯尼思。法尔科内。分形几何——数学基础及其应用。沈阳：东北工学院出版社，1991

6 平田隆幸。新地震观和分数维，地震地质译丛，1988，(4)

7 平田隆幸。大森幂次公式与断层系分数维的关系。地震地质译丛，1988，(4)

8 洪时中、洪时明。分维及其在地震科学中应用的若干最新进展。国际地震动态，1988，(12)

9 洪时中、洪时明。地学领域中的分维研究：水系、地震及其它。大自然探索，1988，(2)

10 斋藤正德等著，数理地震学。北京：地震出版社，1990

11 Aviles, DC. A. et al. Fractal Analysis Applied to Characteristic Segments of the San Andres Fault. J. Geophys, Res. 92. 1987,331–334

12 四川地震局，四川大学地震科学中的自组织联合研究组。地震活动时空分布序列的分形自组织特征——安宁河活动断裂带地震分布研究、大自然探索，1990，(1)

13 （同上）。中小地震时间组织结构的无标度区与大震前期征兆——鲜水河断裂带现今地震分布探讨。1990，(1)

14 C.H.肖尔茨，B.B.曼德尔布罗特。地球科学中的分形研究。北京：中国科学技术出版社，1991

15 杨新社。地球物理学中的分形与分维研究进展。地球科学进展，1991，6 (5)

16 李克文、秦同洛。分维几何及其在石油工业中的应用。石油勘探与开发，1990 (5)

17 杜伯仁。分形（Fractal）理论及在地学中应用简介。地质科技情报，1991 (3)

18 Po-zen Wong and Jar-shyong Lin. Studying Fractal Geometry on Submicron Length Scales by Small-Angle Scattering, Mathematical Geology, 1988, 20(6)

19 谢和平。分形几何及其在岩土力学中的应用。岩土工程学报，1992 (1)

20 大野博之，小岛圭二。岩体破裂系的分数维。地震地质译丛，1990，(2)

21 谢和平。大理岩微观断裂的分形（Fractal）模型研究。科学通报，1989，(5)

22 平田降幸。断层与分数维。地震地质译丛，1990, (1)

23 JP Chiles. Fractal and Geostatistical Methods for Modeling of a Fracture Network. Mathematical Geology, 1988, 20(6)

24 毕先梅、索书田。分形理论及其应用——全国分形理论及应用学术讨论会文集。成都：四川大学出版社，1989

25 D. L. Turcotte. A Fractal Approach to the Relationship between Ore Grade and Tonnage. Economic Geology, Vol. 81. 1986, 1528～1532

26 孟宪国、赵鹏大。地质数据的分形结构。地球科学，1991，(3)

27 孟宪国。R／S 分析和地球化学数据的分形处理。地球科学，1991，(5)

28 孟宪国等。方位-分维估值法，地球科学，1992，(1)

29 彭志忠。准晶体的构筑原理及微粒分数维结构。地球科学，1985，(4)

30 沈步明、施倪承，八次对称准晶体的分数维结构。科学通报，1990，(19)

31 Anthony D. Fowler. Self-organized mineral textures of igneous rocks: the fractal approach. Earth Science Reviews, 1990,29: 47～55

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net