文章编号：1674－9057(2013)02－0376－06
doi:10.3969/j.issn.1674－9057.2013.02.032

基于区间数互反判断矩阵的一致性调整新方法

徐改丽[a]，谢晓兰[b]

（桂林理工大学 a. 理学院；b. 信息科学与工程学院，广西 桂林 541004）

摘 要：提出了一种区间数互反判断矩阵一致性和排序的新方法。首先根据已有的区间数互反判断矩阵的一致性定义给出了其一致性等价定义，通过定义导出矩阵，给出了完全一致性判别方法和满意一致指标，并根据此指标给出了一种完全一致性的逼近方法和满意一致的调整方法。最后通过对实互反判断矩阵权重公式的推广给出了区间数互反判断矩阵的一个权重计算公式，算例证明了此方法的有效性。

关键词：区间互反判断矩阵；一致性；权重；一致性指标

中图分类号：C934　　**文献标志码**：A

0 引 言

层次分析法（AHP）[1]作为处理多因素决策问题的一种方法，被应用于决策的各个领域。它通过对方案的两两比较建立判断矩阵，根据判断矩阵计算权重向量，从而实现对方案的排序。由于决策问题的复杂性和人类思维的模糊性，决策信息有时以区间数互反判断矩阵的形式给出，判断矩阵是否满足一致性要求将会直接影响排序结果的合理性。因此，判断矩阵的一致性和排序问题一直是研究的热点：文献[2－4]给出了3种不同的一致性定义；王应明[5]和魏翠萍[6]根据文献[2]分别通过优化模型中最优解检验矩阵的一致性程度来判断区间判断矩阵的一致性；文献[4,7]分别利用端点矩阵的一致性来判断区间判断矩阵的一致性。这些方法虽然解决了一些现实问题，但没有给出当判断矩阵达不到满意一致时的调整方法，所以有必要对其进行深入研究。关于排序问题的研究，目前有以下几种排序方法：（1）基于随机误差传递理论给出权重向量[8]，即从区间数判断矩阵中构造一个数字判断矩阵，求出其权重向量，然后再根据随机误差传递理论求出不确定度，最后权重向量和不确定度一起构成原区间数判断矩阵的区间权重向量；（2）根据原判断矩阵与一致矩阵之间的偏差，通过建立数学规划模型求判断矩阵的区间权重[5－6,9]，利用此类方法对方案进行排序时会涉及到比较棘手的区间数排序问题，文献［10］直接给出了区间权重的计算公式，但此公式只适用于完全一致矩阵的计算。文献［11］虽然针对专家给出的判断矩阵提出了一致性指标的计算方法，但并没有给出当判断矩阵不满足一致性要求时的调整方法；（3）把区间判断矩阵转换为实数型判断矩阵求解权重，或利用某种算子直接计算出精确数权重向量[4,12]。这种方法避免了区间数排序，但在转化的过程中可能会丢失某些决策信息。

本文在文献［3］一致性定义的基础上，给出了区间数互反判断矩阵的等价定义，通过定义导出矩阵，给出了一种新的一致性指标和一致性逼近方法(即构造完全一致的区间数判断矩阵),及矩阵不满足一致性时的调整新方法。该方法完全依赖于决策矩阵本身对矩阵进行调整，保留了决策者

收稿日期：2012－05－04
基金项目：广西科学研究与技术开发计划项目（桂科攻11107014－4）；广西教育厅科研项目（201106LX248）；广西空间信息与测绘重点实验室基金项目（桂科能1103108－25）；桂林市科学研究与技术开发计划项目（20110111－1）
作者简介：徐改丽（1982—），女，硕士，讲师，研究方向：预测与决策，jiali0706@126.com。
通讯作者：谢晓兰，博士，教授，xie_xiao_lan@foxmail.com。
引文格式：徐改丽，谢晓兰. 基于区间数互反判断矩阵的一致性调整新方法[J]. 桂林理工大学学报，2013，33(2)：376－381.

的大部分决策信息，而且能快速达到满意一致。最后通过对实判断矩阵权重公式的推广给出了区间数互反判断矩阵的一个权重计算公式，利用该公式可以直接根据区间数判断矩阵计算出实数权重向量，这样既保留了决策的大部分信息又避免了区间数排序。本文通过算例说明了此方法的有效性。

1　预备知识

假设有 n 个备选方案 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，在某准则下，专家给出的区间互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}$，记 $I=\{1,2,\cdots,n\}$。下面给出区间互反判断矩阵的相关概念。

定义 1[13]　记 $\bar{a}=[a^-,a^+]=\{a\mid a^-\leqslant a\leqslant a^+,a\in\mathbf{R}\}$，则称 $\bar{a}$ 为区间数，其中 $a^-\leqslant a^+$，$\mathbf{R}$ 为实数域。当 $a^-\geqslant 0$ 时，称区间数 $\bar{a}$ 为正区间数。

定义 2[14]　设判断矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$，若满足：①$p_{ii}=1,\forall i\in I$；②$p_{ji}=1/p_{ij},\forall i,j\in I,i\neq j$，称矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为实正互反判断矩阵。

定义 3[7]　称 $\boldsymbol{A}=(\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 为区间数互反判断矩阵，其中 $\bar{a}_{ij}=[a_{ij}^-,a_{ij}^+]$。若满足 $a_{ii}=[1,1],\bar{a}_{ji}=[1/a_{ij}^+,1/a_{ij}^-],0<a_{ij}^-\leqslant a_{ij}^+,\forall i,j\in I$。

定义 4[12]　设 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$ 为实正互反判断矩阵，若 $p_{ij}=p_{ik}p_{kj},\forall i.j,k\in I$，则称 $\boldsymbol{P}$ 为一致性实正互反判断矩阵。

定理 1[15]　设 $\boldsymbol{P}$ 为实正互反判断矩阵，则以下 3 个关系式等价：

$$p_{ij}=p_{ik}p_{kj},\forall i,j,k\in I;\tag{1}$$

$$p_{ij}=p_{ik}p_{kj},\forall i<j<k;\tag{2}$$

$$p_{ij}=p_{ik}p_{kj},\ \forall i<k<j。\tag{3}$$

定理 2[15]　实正互反判断矩阵 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{n\times n}$ 的权重 ω_i 可表示为

$$\omega_i=\Big(\prod_{j=1}^{n}p_{ij}\Big)^{1/n},\text{满足}\prod_{i=1}^{n}w_i=1。\tag{4}$$

定义 5[7]　设 $\boldsymbol{A}=(\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 为区间数互反判断矩阵，若 $\bar{a}_{ij}=\bar{a}_{ik}\bar{a}_{kj},\forall i<k<j$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为一致性区间数互反判断矩阵。

定理 3　设 $\boldsymbol{A}=(\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 为区间数互反判断矩阵，则以下 3 个关系式等价：

$$a_{ij}^-=a_{ik}^-a_{kj}^-,a_{ij}^+=a_{ik}^+a_{kj}^+,\quad\forall i<k<j;\tag{5}$$

$$a_{ij}^-=a_{ik}^-a_{kj}^+,a_{ij}^+=a_{ik}^+a_{kj}^-,\forall i<j<k;\tag{6}$$

$$a_{ij}^-=a_{ik}^+a_{kj}^-,a_{ij}^+=a_{ik}^-a_{kj}^+,\forall k<i<j。\tag{7}$$

证明　式(5)⇒式(6)

当 $i<j<k$ 时，根据式(5)和区间数的运算[12]，有 $a_{ik}^-=a_{ij}^-a_{jk}^-,a_{ik}^+=a_{ij}^+a_{jk}^+$，

由互反性可得：$a_{ik}^-=a_{ij}^-\cdot 1/a_{kj}^+,a_{ik}^+=a_{ij}^-\cdot 1/a_{kj}^-$，故 $a_{ij}^-=a_{ik}^-a_{kj}^+,a_{ij}^+=a_{ik}^+a_{kj}^-$。

即式(6)成立。

同理可证式(6)⇒式(7)，式(7)⇒式(5)。

由定义 5 和区间数的运算可知，定理 3 可以作为区间数模糊互反判断矩阵一致性的等价定义。选取一致性最好的原区间数互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}=(\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 的第 k 行(列)，由定理 3 和判断矩阵的互反性构造的一致性区间数互反判断矩阵为 $\boldsymbol{A}^*=(a_{ij}^*)_{n\times n}$，即

$$\boldsymbol{a}_{ij}^{-*}=\begin{cases}a_{ik}^-a_{kj}^-,\ i<k<j;\\ a_{ik}^-a_{kj}^+,\ i<j<k;\\ a_{ik}^+a_{kj}^-,\ k<i<j;\\ 1/a_{ij}^+,\ j<i;\end{cases}$$

$$\boldsymbol{a}_{ij}^{+*}=\begin{cases}a_{ik}^+a_{kj}^+,\ i<k<j;\\ a_{ik}^+a_{kj}^-,\ i<j<k;\\ a_{ik}^-a_{kj}^+,\ k<i<j;\\ 1/a_{ij}^-,\ j<i。\end{cases}\tag{8}$$

定理 4　若 $\boldsymbol{A}$ 中的元素满足条件：① $a_{ik}^+/a_{ik}^-\geqslant a_{kj}^+/a_{kj}^-,\forall i<j<k$；② $a_{ik}^+/a_{ik}^-\leqslant a_{kj}^+/a_{kj}^-,\forall k<i<j$，则有

$$a_{ij}^{-*}\leqslant a_{ij}^{+*},\forall i,j\in I。$$

令 $a_{ij}^{-*}\leqslant a_{ij}^{+*}$，由式(8)，定理显然成立。

2　区间数互反判断矩阵的一致性检验

2.1　完全一致性检验

定义 6　称矩阵 $\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{n\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}=(\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 的导出矩阵，其中 $d_{ij}=(a_{ij}^-)^{1-\alpha}(a_{ij}^+)^{\alpha},i\leqslant j;d_{ij}=1/d_{ji},i>j。\alpha\in[0,1]$。

矩阵 $\boldsymbol{D}$ 反映了决策者的风险偏好：当 $0\leqslant\alpha<0.5$ 时，决策者是保守型；当 $\alpha=0.5$ 时，决策者是中立型；$0.5<\alpha\leqslant 1$，决策者是冒险型。

定理 5　区间数判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一致的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{D}$ 完全一致，对 $\forall\alpha\in[0,1]$ 都成立。

证明　必要性　根据一致性定义，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一

致,即 $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ik}\bar{a}_{kj}, \forall i < k < j$,所以有

$a_{ij}^- = a_{ik}^- a_{kj}^-, a_{ij}^+ = a_{ik}^+ a_{kj}^+, \forall i < k < j$。故对 $\forall i < k < j$,有

$d_{ij} = (a_{ij}^-)^{1-\alpha}(a_{ij}^+)^{\alpha} = (a_{ik}^- a_{kj}^-)^{1-\alpha}(a_{ik}^+ a_{kj}^+)^{\alpha} = [(a_{ik}^-)^{1-\alpha}(a_{ik}^+)^{\alpha}][(a_{kj}^-)^{1-\alpha}(a_{kj}^+)^{\alpha}] = d_{ik}d_{kj}$。

故由定理 1 可知,矩阵 $\boldsymbol{D}$ 是完全一致的实正互反判断矩阵。

充分性 若 $\forall \alpha \in [0,1]$,矩阵 $\boldsymbol{D}$ 都完全一致,根据定理 1,对 $\forall i < k < j$, 有 $d_{ij} = d_{ik}d_{kj}$,即 $(a_{ij}^-)^{1-\alpha}(a_{ij}^+)^{\alpha} = (a_{ik}^- a_{kj}^-)^{1-\alpha}(a_{ik}^+ a_{kj}^+)^{\alpha}$。特别地,$\alpha = 0$ 时,有 $a_{ij}^- = a_{ik}^- a_{kj}^-$,$\alpha = 1$ 时,有 $a_{ij}^+ = a_{ik}^+ a_{kj}^+$, 即 $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ik}\bar{a}_{kj}$,故区间数互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 完全一致。

根据定义 5,定理 3 和 5 都可以检验区间数互补判断矩阵是否完全一致,但很少有判断矩阵能达到完全一致,下面根据导出矩阵的一致性给出区间数判断矩阵的一致性指标。

2.2 一致性指标

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一致时, 其导出矩阵 $\boldsymbol{D}$ 也一致,此时对任意的 $k \neq i,j$,有 $d_{ij} = d_{ik}d_{kj}$。若令 $e_{ij}(\alpha) = \ln d_{ij} - \frac{1}{n-2}\sum_{k=1,k\neq i,j}^{n}(\ln d_{ik} + \ln d_{kj})$,则 $e_{ij}(\alpha)$ 描述了导出矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的直接判断信息 d_{ij} 与间接判断信息均值 $(d_{ik}d_{kj})^{1/(n-2)}$ 的一致性程度,当判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一致时,$e_{ij}(\alpha) = 0, \forall \alpha \in [0,1]$。否则,存在 i,j 使得 $e_{ij}(\alpha) \neq 0$。因此,可以利用 $e_{ij}(\alpha)$ 间接描述矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不一致程度。

由此可以根据判断矩阵 $\boldsymbol{A} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$ 的上三角元素的平均偏差给出满意一致性指标。

定义 7 令 $\overline{CI} = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n}|c_{ij}|$,其中 $c_{ij} = \int_0^1 e_{ij}(\alpha)\mathrm{d}\alpha$,称 $\overline{CI}$ 为区间数判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一致性指标,若 $\overline{CI} \leqslant CI^*$,称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为满意一致的区间数互补判断矩阵。其中 CI^* 为满意一致性阈值。根据文献[11] 给出的一致性指标值,本文算例中设定 $CI^* = 0.61$。

根据实正互反判断矩阵的定义及一致性定义和定理 4,容易得到以下结论。

定理 5 (1) $e_{ji} = -e_{ij}; c_{ji} = -c_{ij}$; (2) 区间数互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 完全一致的充要条件是 $\overline{CI} = 0$。

3 区间数互反判断矩阵一致性逼近新方法

3.1 构造完全一致的区间数判断矩阵新方法

对不一致的判断矩阵 $\boldsymbol{A} = (\bar{a}_{ij})_{n\times n}$,考虑选取一致性最好的某一行元素,由定理 2 和 3 构造新的一致性区间数互反判断矩阵 $\boldsymbol{A}^*$,$\boldsymbol{A}^*$ 可认为是与原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 最接近的一致性矩阵。

一致性最好即偏差最小,故可以根据 2.2 节提出的导出矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的偏差 $e_{ij}(\alpha)$ 与原判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的偏差 c_{ij} 计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 每一行的总偏差 c_i,其中 $c_i = \sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|$,$c_{ij} = \int_0^1 e_{ij}(\alpha)\mathrm{d}\alpha$。总偏差 c_i 最小的一行即一致性最好的一行。因此可按照以下步骤构造完全一致性矩阵:

① 根据定义 6 写出原判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的导出矩阵 $\boldsymbol{D}$;

② 计算原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的偏差矩阵 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n\times n}$,其中 $c_{ij} = \int_0^1 e_{ij}(\alpha)\mathrm{d}\alpha$。若 $c_{ij} = 0, \forall i,j \in I$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 完全一致;否则,转(3);

③ 计算每行的总偏差 c_i,其中 $c_i = \sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|$。找出 $c_{k_0} = \min_i c_i$,可以认为第 k_0 行是一致性最好的一行;

④ 检验原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是否满足定理 3,若满足,根据第 k_0 行和式(8) 构造完全一致矩阵 $\boldsymbol{A}^*$;否则无法构造完全一致矩阵。

3.2 满意一致性调整新方法

当原判断矩阵不满足定理 3 或想尽可能多地保留原判断矩阵的决策信息时, 可以对上三角元素中偏差最大的元素进行调整, 下三角元素根据区间判断矩阵的互反性给出, 逐步调整使其达到满意一致性要求。具体的调整方法如下。

①根据定义 6 计算原判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的导出矩阵 $\boldsymbol{D}$。

②计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中上三角元素的偏差 $c_{ij}(i < j)$,其中 $c_i = \sum_{j=1}^{n}|c_{ij}|$,$c_{ij} = \int_0^1 e_{ij}(\alpha)\mathrm{d}\alpha$,$e_{ij}(\alpha) = \ln d_{ij} - \frac{1}{n-2}\sum_{k=1,k\neq i,j}^{n}(\ln d_{ik} + \ln d_{kj})$。

③ 根据定义 7 对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行一致性检验，若满足一致性要求则停止，否则转(4)。

④ 找出 $|c_{st}| = \max\limits_{i<j}|c_{ij}|$，对元素 $\bar{a}_{st}$ 进行调整。

若 $c_{st} > 0$，说明 $\bar{a}_{st}$ 偏大，由于互反判断矩阵一般采用 1 ~ 9 标度，为了使调整后的元素仍是 1 ~ 9 标度且元素调整前后只在相邻的重要性等级内变化，故采用以下调整方法。

(Ⅰ) 若 $a_{st}^- > 1$，令

$\bar{a}_{st}' = [a_{st}^- - \lambda, a_{st}^+ - \lambda]$，

$\lambda \in [1, \min\{2, a_{st}^- - 1\}]$；

(Ⅱ) 若 $a_{st}^+ \leqslant 1$，令

$\bar{a}_{st}' = \left[\dfrac{1}{(1/a_{st}^-) + \lambda}, \dfrac{1}{(1/a_{st}^+) + \lambda}\right]$，

$\lambda \in [1, \min\{2, (1/a_{st}^-) - 1\}]$。若 $a_{st}^+ = 1/9$，则 $\bar{a}_{st}' = \left[\dfrac{1}{(1/a_{st}^-) + \lambda}, a_{st}^+\right]$。

若 $c_{st} < 0$，说明 $\bar{a}_{st}$ 偏小，则有：

(Ⅰ) 若 $a_{st}^- > 1$，令

$\bar{a}_{st}' = [a_{st}^- + \lambda, a_{st}^+ + \lambda]$，

$\lambda \in [1, \min\{2, a_{st}^- - 1\}]$ 且满足 $a_{st}^+ + \lambda \leqslant 9$；

(Ⅱ) 若 $a_{st}^+ \leqslant 1$，令

$\bar{a}_{st}' = \left[\dfrac{1}{(1/a_{st}^-) - \lambda}, \dfrac{1}{(1/a_{st}^+) - \lambda}\right]$，

$\lambda \in [1, \min\{2, (1/a_{st}^-) - 1\}]$。

⑤ 设调整后的矩阵为 $\boldsymbol{A}' = (\bar{a}_{ij}')_{n\times n}$，其中 $\bar{a}_{ij}' = \bar{a}_{ij}(i, j \neq s, t)$；$\bar{a}_{ij}' = \bar{a}_{st}'$，$i = s, j = t$；$\bar{a}_{ij}' = \dfrac{1}{\bar{a}_{st}'}$，$i = t, j = s$，并将矩阵 $\boldsymbol{A}' = (\bar{a}_{ij})'_{n\times n}$ 记为 $\boldsymbol{A}$，转(1)。

4　区间数互反判断矩阵权重的确定

为方便起见，用 $\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\widetilde{a}_{ij})_{n\times n}$ 表示初始的一致性判断矩阵 $\boldsymbol{A}$、逼近的一致性判断矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 或调整后的满意一致性矩阵 $\boldsymbol{A}'$，此时对于矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的导出矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{D}}$，由式(4)，得

$\omega_i(\alpha) = \left(\prod\limits_{j=1}^{n} d_{ij}(\alpha)\right)^{1/n}$，满足

$\prod\limits_{i=1}^{n} w_i(\alpha) = 1$，其中 $\alpha \in [0,1]$。　　(9)

因此，区间数互反判断矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}} = (\widetilde{a}_{ij})_{n\times n}$ 的权重可表示为

$$\omega_i = \int_0^1 \omega_i(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha,\ i \in I。\qquad (10)$$

为了保证权重的乘性归一化，令 $\boldsymbol{W} = (W_1, W_2, \cdots, W_n)^{\mathrm{T}}$ 作为方案的最终排序权向量，其中

$$W_i = \frac{\omega_i}{\left(\prod\limits_{j=1}^{n}\omega_j\right)^{1/n}},\ \text{满足}\prod_{i=1}^{n} W_i = 1。\qquad (11)$$

5　算　例

例 1　计算下列区间数互反判断矩阵的权重向量：

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & [2,5] & [2,4] & [1,3] \\ \left[\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right] & 1 & [1,3] & [1,2] \\ \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{3},1\right] & 1 & \left[\frac{1}{2},1\right] \\ \left[\frac{1}{3},1\right] & \left[\frac{1}{2},1\right] & [1,2] & 1 \end{pmatrix}。$$

经计算，$CI^* = 0.402\,4 > 0$，所以原矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不一致。根据 3.1 节的步骤 ① ~ ④ 构造完全一致矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的具体过程见表 1。

通过构造矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的导出矩阵和式(9) ~ (11)，得：

$\omega_1 = 1.733\,5$，$\omega_2 = 1.061\,5$，$\omega_3 = 0.612\,9$，$\omega_4 = 0.886\,7$。

例 2　计算下列区间数互反判断矩阵的权重向量：

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & [1,2] & [1,2] & [2,3] \\ \left[\frac{1}{2},1\right] & 1 & [3,5] & [4,5] \\ \left[\frac{1}{2},1\right] & \left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right] & 1 & [6,8] \\ \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right] & \left[\frac{1}{8},\frac{1}{6}\right] & 1 \end{pmatrix}。$$

$\overline{CI} = 0.986\,4$，设 $CI^* = 0.61$，则 $\overline{CI} > CI^*$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 没有达到满意一致，按照 3.2 节中的步骤 1) ~ 5) 对矩阵进行调整，使其达到满意一致，调整的具体过程见表 2(取 $\lambda = 0.05$)。

通过构造矩阵 $\boldsymbol{P}_4$ 的导出矩阵和式(9) ~ (11)，得：

$\omega_1 = 1.493\,8$，$\omega_2 = 1.524\,8$，$\omega_3 = 1.190\,1$，$\omega_4 = 0.368\,9$。

6　结束语

本文从实正互反判断矩阵和区间数互反判断

表 1 矩阵 P 的完全一致性逼近过程

Table 1 Process of complete consistency approximation of matrix P

导出矩阵 D	偏差矩阵 C
$\begin{pmatrix} 1 & 2^{1-\alpha}5^{\alpha} & 2^{1-\alpha}4^{\alpha} & 1^{1-\alpha}3^{\alpha} \\ (1/2)^{1-\alpha}(1/5)^{\alpha} & 1 & 1^{1-\alpha}3^{\alpha} & 1^{1-\alpha}2^{\alpha} \\ (1/2)^{1-\alpha}(1/4)^{\alpha} & (1)^{1-\alpha}(1/3)^{\alpha} & 1 & (1/2)^{1-\alpha}(1)^{\alpha} \\ (1)^{1-\alpha}(1/3)^{\alpha} & (1)^{1-\alpha}(1/2)^{\alpha} & (2)^{1-\alpha}(1)^{\alpha} & 1 \end{pmatrix}$	$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0.804\,7 & -0.258\,5 & -0.546\,2 \\ -0.804\,7 & 0 & 0.258\,5 & -0.546\,2 \\ 0.258\,5 & -0.258\,5 & 0 & 0 \\ 0.546\,2 & 0.546\,2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
每行总偏差 c_i	$c_1 = 1.609\,4, c_2 = 1.609\,4, c_3 = 0.517, c_4 = 1.092\,4. c_3 = \min_i c_i$
一致矩阵 A^*	$\begin{pmatrix} 1 & [4/3,2] & [2,4] & [1,4] \\ [1/2,3/4] & 1 & [1,3] & [1/2,3] \\ [1/4,1/2] & [1/3,1] & 1 & [1/2,1] \\ [1/4,1] & [1/3,2] & [1,2] & 1 \end{pmatrix}$

表 2 矩阵 P 的满意一致性调整过程

Table 2 Process for adjusting matrix P to satisfied consistency

判断矩阵	偏差矩阵	$\overline{CI}$
$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & [1,2] & [1,2] & [2,3] \\ [1/2,1] & 1 & [3,5] & [4,5] \\ [1/2,1] & [1/5,1/3] & 1 & [6,8] \\ [1/3,1/2] & [1/5,1/4] & [1/8,1/6] & 1 \end{pmatrix}$	$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1.151\,3 & 0.016\,1 & -1.167\,4 \\ -1.151\,3 & 0 & 1.572\,9 & -0.421\,6 \\ -0.016\,1 & -1.572\,9 & 0 & 1.589 \\ 1.167\,4 & 0.421\,6 & -1.589 & 0 \end{pmatrix}$	0.986 4
$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & [1,2] & [1,2] & [2,3] \\ [1/2,1] & 1 & [3,5] & [4,5] \\ [1/2,1] & [1/5,1/3] & 1 & [5,7] \\ [1/3,1/2] & [1/5,1/4] & [1/7,1/5] & 1 \end{pmatrix}$	$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1.151\,3 & -0.062\,8 & -1.088\,5 \\ -1.151\,3 & 0 & 1.493\,9 & -0.342\,6 \\ 0.062\,8 & -1.493\,9 & 0 & 1.431\,1 \\ 1.088\,5 & 0.342\,6 & -1.431\,1 & 0 \end{pmatrix}$	0.928 4
$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & [1,2] & [1,2] & [2,3] \\ [1/2,1] & 1 & [2,4] & [4,5] \\ [1/2,1] & [1/4,1/2] & 1 & [5,7] \\ [1/3,1/2] & [1/5,1/4] & [1/7,1/5] & 1 \end{pmatrix}$	$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.994\,1 & 0.094\,3 & -1.088\,5 \\ -0.994\,1 & 0 & 1.179\,6 & -0.185\,5 \\ -0.094\,3 & -1.179\,6 & 0 & 1.273\,9 \\ 1.088\,5 & 0.185\,5 & -1.273\,9 & 0 \end{pmatrix}$	0.802 7
$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & [1,2] & [1,2] & [2,3] \\ [1/2,1] & 1 & [2,4] & [4,5] \\ [1/2,1] & [1/4,1/2] & 1 & [4,6] \\ [1/3,1/2] & [1/5,1/4] & [1/6,1/4] & 1 \end{pmatrix}$	$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0.994\,1 & 0 & -0.994\,1 \\ -0.994\,1 & 0 & 1.085\,3 & -0.091\,2 \\ 0 & -1.085\,3 & 0 & 1.085\,3 \\ 0.994\,1 & 0.091\,2 & -1.085\,3 & 0 \end{pmatrix}$	0.708 3
$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & [1,2] & [1,2] & [2,3] \\ [1/2,1] & 1 & [1,3] & [4,5] \\ [1/2,1] & [1/3,1] & 1 & [4,6] \\ [1/3,1/2] & [1/5,1/4] & [1/6,1/4] & 1 \end{pmatrix}$	$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0.748\,9 & 0.245\,2 & -0.994\,1 \\ 0.748\,9 & 0 & 0.594\,9 & -0.154\,0 \\ -0.245\,2 & -0.594\,9 & 0 & 0.840\,1 \\ 0.994\,1 & 0.154\,0 & -0.840\,1 & 0 \end{pmatrix}$	0.596 2

矩阵的一致性定义出发，给出了区间数互反判断矩阵一致性的等价定义和一致性的判别方法，通过定义导出矩阵，给出了一种完全一致性的逼近方法和满意一致性指标及一致性调整新方法，最后给出了权重的计算公式，通过该公式直接得出了区间判断矩阵的实数权重，避免了区间数的排序问题。但是，只有当原判断矩阵满足定理 4 时才能利用完全一致性逼近方法，不满足时如何构造一致性矩阵有待进一步研究。由于篇幅有限，本文只用具体算例说明了新方法的有效性，从理论上证明方法的收敛性将是下一步研究的方向。

参考文献：

[1] Satty T L. The Analytic Hierarchy Process: Planning, Priority Setting, Resource Allocation [M]. New York: Mcgraw-Hill, 1980.

[2] Wang Y M, Yang J B, Xu D L. Interval weight generation approaches based on consistency test and interval comparison matrices [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 167 (1): 252 - 273.

[3] 冯向前，魏翠萍，胡钢，等. 区间数判断矩阵的一致性研究 [J]. 控制与决策，2008，23 (2)：182 - 186.

[4] Liu F. Acceptable consistency analysis of interval reciprocal comparison matrices [J]. Fuzzy Sets and System, 2009, 160 (18): 2686 - 2700.

[5] Wang Y M, Yang J B, Xu D L. A two-stage logarithmic goal programming method for generating weights from interval comparison matrices [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 152 (3): 475 – 498.
[6] Wei C P, Zhang Y Z, Feng X Q. Deriving interval weights from interval comparison matrices based on consistency test [J]. Systems Engineering – Theory & Practice, 2007, 27 (10): 132 – 139.
[7] 乐琦, 樊治平. 区间数互反判断矩阵的一致性分析及排序方法 [J]. 系统工程学报, 2010, 25 (4): 459 – 465.
[8] 刘颖芬, 占济舟. 计算区间数判断矩阵权重的一种新方法 [J]. 江西理工大学学报, 2006, 27 (6): 65 – 66.
[9] Conde E, de la Paz Rivera Pérez M. A linear optimization problem to derive relative weights using an interval judgment matrix [J]. European Journal of Operational Research, 2010, 201 (2): 537 – 544.
[10] 覃菊莹. 区间数判断矩阵的一致性及权重计算 [J]. 数学的实践与认识, 2010, 40 (8): 165 – 171.
[11] 王西静. 区间数判断矩阵的满意一致性及排序方法 [J]. 成都大学学报: 自然科学版, 2010, 29 (4): 304 – 306.
[12] Lan J B, Lin J, Cao L J. An information mining method for deriving weights from an interval comparison matrix [J]. Mathematical and Computer Modeling, 2009, 50: 393 – 400.
[13] 吴小欢, 覃菊莹, 吕跃进. 区间数判断矩阵的一致性及权重计算 [J]. 模糊系统与数学, 2007, 21 (5): 113 – 119.
[14] 郭欣荣, 吕跃进, 王志强. 一种提高正互反判断矩阵一致性水平的新算法[J]. 广西科学, 2007, 14(1): 39 – 43.
[15] Herrera-Viedma E, Herrera F, Chiclana F, et al. Some issues on consistency of fuzzy preference relations [J]. European Journal of Operational Research, 2004, 154 (1): 98 – 109.

Identifying and Improving Method for Consistency of Interval Reciprocal Judgment Matrices

XU Gai-li[a], XIE Xiao-lan[b]

(a. *College of Science*; b. *College of Information Science and Engineering*, *Guilin University of Technology*, *Guilin* 541004, *China*)

Abstract: The consistency and ranking method for interval reciprocal judgment matrices are proposed in this paper. First the equivalent definitions of consistency are proposed based on the given consistency definition of interval reciprocal judgment matrices. Then a consistency checking method and a consistent index of an interval reciprocal judgment matrix are given. Complete consistency approximation approach and satisfied consistency adjusting approach of interval reciprocal judgment matrices are proposed based on the consistent index. Finally the weight computing formula are introduced by extending a weight computing formula for real number reciprocal judgment matrices. Two examples are used to illustrate the validity of proposed method.

Key words: interval reciprocal judgment matrices; consistency; weight; consistent index