文章编号：1674－9057(2013)03－0509－04 doi:10.3969/j.issn.1674－9057.2013.03.020

基于约束变换的地图符号新定义

钟业勋[1,2]，胡宝清[1]，王 欢[2]

（1. 广西师范学院 a. 北部湾环境演变与资源利用省部共建教育部重点实验室；
b. 资源与环境科学学院，南宁 530001；2. 广西测绘地理信息局，南宁 530023）

摘 要：制图物体 a 和地图符号 $qgf(a)$ 在 f、g、q 三重拓扑映射下一一对应，其实质是满足某种条件的点集间的变换。通过给定不同的约束条件，分别定义了依比例符号、不依比例符号和半依比例符号，从而使这些地图符号获得了精密的数学形式和定量描述。

关键词：依比例符号；不依比例符号；半依比例符号；拓扑映射；变换；约束条件；数学定义

中图分类号：P283 **文献标志码**：A

地理变量量表具有偏序集的共性，满足不同偏序关系，得到不同的量表形式[1]；地貌基本形态都具有特征点的邻域的共性，邻域内任意点与特征点的高程差异满足不同的条件，分别得到山、谷、坡等地貌概念[2]；地图符号本质上是具有定位功能和表象功能不同性质的点集，其结构不同确定了不同的符号性质[3]。存在于三维空间 X 中的制图区域 A 内的地物 $a \in A \subset X$，其在 f、g、q 三重拓扑映射下的平面像 $qgf(a) \in qgf(A) \subset Z$ 即为它所对应的地图符号。这三重拓扑映射，即从三维空间 X 到地球椭球面 S 的映射 $f: X \to S$；从 S 到制图者的认知结构 Y 的映射 $g: S \to Y$；从 Y 到二维平面 Z 的映射 $q: Y \to Z$。映射、变换或者对应都是函数的同义词[4-5]。所以，地图符号 $qgf(a)$ 实质上是制图物体 a 在某种约束条件下的变换的结果。约束条件不同，便得到不同性质的地图符号。本文是笔者基于约束变换的地图符号新定义的研究。

1 依比例符号

1.1 制图对象的空间尺度

地图所反映的是地学实体，是地学领域的事物和现象，它的空间尺度相对于人类的一般活动是宏观的。宏观物体实现地图可视化有一定的下限。泰勒教授1994年提出的著名地图学概念图解中，把地图可视化作为地图学的核心[6]。由于人的视觉分辨的阈值限制，在地图上表示1个点至少要0.15 mm，2个符号之间的距离不能小于0.2 mm，最细的线不能细于0.1 mm。这样，要使2个定位准确的0.15 mm的点在图上能够分辨，就需要0.5 mm的空间。地图符号（包括简单的点）毫无定位误差是不可能的，国内外各种地图的图面精度，地物点的点位中误差（图上）允许值为±0.5 mm[7-8]，把必要的定位空间和允许定位误差加起来，得到1 mm。也就是说，在考虑定位误差前提下，必须有1 mm的图上距离，才能使2个0.15 mm的点能分辨，记这阈值为 $\min d$，它所对应的实地距离 c 为：

$$c = (qgf)^{-1}(\min d)。 \quad (1)$$

我国国家基本比例尺地形图的最大比例尺为1∶5 000，由图上1 mm可算出其实地两点距离 c 为5 m。地图比例尺愈小，$\min d$ 所对应的实地距离 c 就愈大[9]。

1.2 地图比例尺

定义1 地图比例尺 设 $a \in A \subset X$ 为三维

收稿日期：2012－08－02
基金项目：国家自然科学基金项目（40871250）；广西北部湾重大基础专项（2011GXNSFE018003；2012GXNSFEA053001）
作者简介：钟业勋（1939—），男，教授，研究方向：地图学理论，gxzyxun@163.com。
通讯作者：胡宝清，博士，教授，hbq1230@sina.com。
引文格式：钟业勋，胡宝清，王欢. 基于约束变换的地图符号新定义［J］. 桂林理工大学学报，2013，33（3）：509－512.

空间 X 中的制图区域 A 内的制图物体，$\forall P_1(\varphi,\lambda)$，$P_2(\varphi,\lambda) \in A \wedge d(p_1,p_2) \geqslant c \rightarrow \exists P_1'(x,y)$，$P_2'(x,y) \in qgf(A) \wedge d(p_1',p_2') \geqslant \min d$ 使得 A 中任意两点间的距离 $d(P_1(\varphi,\lambda),P_2(\varphi,\lambda))$ 与 $qgf(A)$ 中对应的两点间的距离 $d(P_1'(x,y),P_2'(x,y))$ 之比为常数 M，即

$$\frac{d(P_1(\varphi,\lambda),P_2(\varphi,\lambda))}{d(P_1'(x,y),P_2'(x,y))} = M \,\Big|\, M \text{ 为常数}, \quad (2)$$

则称地图 $qgf(A)$ 的比例尺为 $1/M$。

1.3 等价关系

定理 1 等价关系 集合 X 上的每个等价关系“~”决定着的一个分类 $\{X_i\}_{i\in I}$，使得 X 的元素 x 与 x' 属于同一类，$X_i \Leftrightarrow x \sim x'$；反之，集合 X 上的每个分类 $\{X_i\}_{i\in I}$ 决定着 X 上的一个等价关系“~”，其定义如下[10]：

$$x \sim x' \Leftrightarrow x \text{ 与 } x' \text{ 属于同一类 } X_i。 \quad (3)$$

1.4 依比例符号

定义 2 依比例符号 设 $a \in A \subset X$ 为三维空间 X 中的制图区域 A 内的制图物体，$\forall P_1(\varphi,\lambda)$，$P_2(\varphi,\lambda) \in a \wedge d(p_1,p_2) \geqslant c \rightarrow \exists P_1'(x,y)$，$P_2'(x,y) \in qgf(a) \wedge d(p_1',p_2') \geqslant \min d$ 使得 a 中任意两点间的距离 $d(P_1(\varphi,\lambda),P_2(\varphi,\lambda))$ 与 $qgf(a)$ 中对应的两点间的距离 $d(P_1'(x,y),P_2'(x,y))$ 之比为常数 M，即满足式(2)，则称 $qgf(a)$ 为 a 的依比例符号(图 1)。

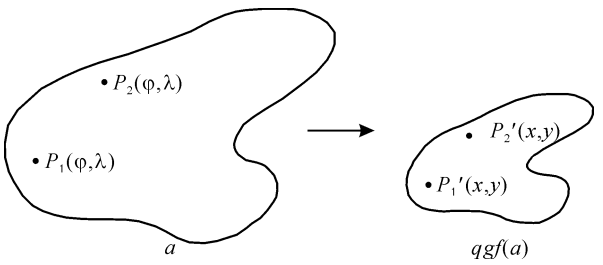


图 1 依比例符号变换

Fig. 1 Transformation of scale symbol

由于地图 $qgf(A)$ 和它内部的地图符号 $qgf(a)$ 满足同一的关系式，因而 $qgf(a) \sim qgf(A)$，两者属同一类，故称 $qgf(a)$ 为 a 的依比例符号。

2 不依比例符号

2.1 不依比例符号产生的必然逻辑

制图物体在地球椭球面上的投影为 $f(a)$，可视化地图符号表示的基本空间为一维表示阈值 $\min d$ 的平方，即 $\min d^2$。$\min d^2$ 在地球椭球面上的原像为

$$f(c)^2 = (qg)^{-1}(\min d^2)。 \quad (4)$$

制图实践中，制图对象和专题的多样性使 $f(c)^2 = (qg)^{-1}(\min d^2) \geqslant f(a)$ 的现象大量存在，即小于或等于可视化地图符号表示的基本空间 $\min d^2$ 的地物大量存在。地图符号的多样性和复杂性，使其包含的非空点集往往大于基本空间 $\min d^2$，因此下述情况大量存在

$$f(Q) \supset (qg)^{-1}(\min d^2) \supset f(a)。 \quad (5)$$

式中的 $f(Q)$ 为椭球面上与 $f(a)$ 邻接但不属于 $f(a)$ 的非空点集，该式的客观存在使不依比例符号的产生具有逻辑必然性。

2.2 不依比例符号的定义

定义 3 不依比例符号 设 $a \in A \subset X$ 为三维空间 X 中的制图区域 A 内的制图物体，$\exists$ 点集 $Q \neq \varnothing \wedge Q \notin a$，在地球椭球面上即为 $f(Q) \neq \varnothing \wedge f(Q) \notin f(a)$，若从 a 到 $qgf(a)$ 的变换满足：

$$a \in A \rightarrow qgf(a) \in qgf(A) \wedge qgf(Q) \subset qgf(a) \mid Q \neq \varnothing \wedge Q \notin a, \quad (6)$$

则称 $qgf(a)$ 为 a 的不依比例符号。

不依比例符号的共同特点是，变换前不属于制图物体 a 的非空点集 Q，其变换后变成了地图符号 $qgf(a)$ 的真子集。被 $qgf(a)$ 包含的 $qgf(Q)$ 的大小，是符号 $qgf(a)$ 被夸大的度量。例如，三角点地物实体 a 只是具有精确坐标的一个零维点，但其对应的地图符号 △ 却是一个等边三角形(边长至少有 1.6 mm)。从零维点无面积的概念来看，对三角点、水准点、埋石点等类的符号，都是对实体的无限夸大。不同的不依比例符号，其夸大程度各不相同(图 2)。

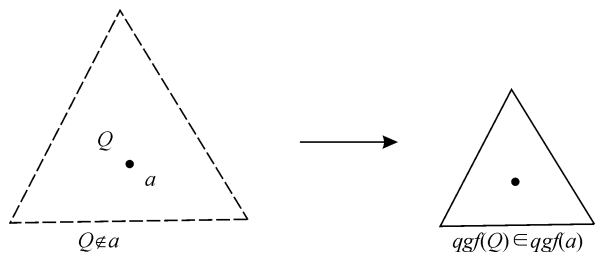


图 2 不依比例符号变换

Fig. 2 Transformation of non-scale symbol

3 半依比例符号

3.1 半依比例符号可用两种形式定义

定义 4 半依比例符号第一定义 设 $a \in A \subset$

X 为三维空间 X 中的制图区域 A 内的制图物体，$\exists$ 定位中心线 $l_a \in a$ 和连通点集 $Q \notin a \wedge Q \neq \varnothing$，$\forall P_1(\varphi,\lambda), P_2(\varphi,\lambda) \in l_a \rightarrow P_1'(x,y), P_2'(x,y) \in qgf(l_a)$，使得 $\dfrac{d(P_1(\varphi,\lambda), P_2(\varphi,\lambda))}{d(P_1'(x,y), P_2'(x,y))} = M$，即满足式(2)，$\forall P_1(\varphi,\lambda), P_2(\varphi,\lambda) \in l_a \rightarrow \exists P_3(\varphi,\lambda) \in Q$，使得 $\overrightarrow{P_1P_2} \perp \overrightarrow{P_1P_3}$，从 a 到 $qgf(a)$ 的变换满足：

$$a \in A \rightarrow qgf(a) \in qgf(A) \wedge qgf(Q) \subset qgf(a) \mid Q \notin a \wedge Q \neq \varnothing, \quad (7)$$

则称 $qgf(a)$ 为 a 的半依比例符号。

变换式(7)及约束条件表明，在 $l_a \in a$ 的地物延伸方向，满足依比例符号必须满足的条件，这是符号的依比例方向；而在 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的垂直方向 $\overrightarrow{P_1P_3}$ 上，却因符号 $qgf(a)$ 包含了原来不属于实体 a 的点集 Q 的变换像 $qgf(Q)$ 而被夸大了，故这个方向不能依比例表示。$\overrightarrow{P_1P_2} \perp \overrightarrow{P_1P_3}$ 的任意性，使定义具有了普遍适用性(图 3)。

铁路、公路、境界、沟渠、单线河、围墙等，均属半依比例符号[11-14]。

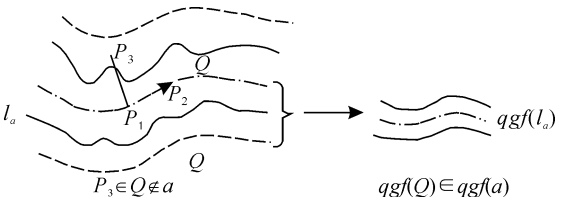


图 3　半依比例符号变换

Fig. 3　Transformation of semi-scale symbol

3.2　半依比例符号第二定义

定义 5　平移　将平面上的点 P 按定向量 $\boldsymbol{k}$ 的方向移动到 P' 点，使 $PP' = k$ 的变换，叫做平移变换，简称平移。

定义 6　制图物体定位中心线 $l_a \in a$ 的平移　设 $l_a \in a$ 与点集 W 之间存在变换 $T_k: l_a \rightarrow W$，$\forall P(x,y) \in l_a \rightarrow P'(x',y') \in W$，使得 $\overrightarrow{PP'} = \boldsymbol{k}$，则称 W 为 l_a 按定向量 $\boldsymbol{k} = \overrightarrow{PP'}$ 方向的平移[15]。

定义 7　半依比例符号　设 $l_a \in a$ 为 a 的定位中心线，W 为 l_a 的平移。若 $W \in Q \notin a$，a 到 $qgf(a)$ 的变换满足：

$$a \in A \rightarrow qgf(a) \in qgf(A) \wedge qgf(W) \in qgf(Q) \subset qgf(a) \mid W \in Q \notin a, \quad (8)$$

则称 $qgf(a)$ 为 a 的半依比例符号。

$l_a \in a$ 是 a 的定位中心线，a 在 l_a 上可依比例表示。W 是 l_a 的平移，所以包含 W 的 Q 也同 l_a 一样，在其延伸方向 W 上能依比例表示。可见 a 和 Q 在相同的方向上具有可依比例表示的性质。但因 $W \in Q \notin a$ 而 $qgf(W) \in qgf(Q) \subset qgf(a)$，所以这个方向因增加了 $qgf(Q)$ 而被夸大了，这种夸大随点集 Q 的大小发生变化，所以这个方向不能依比例表示。这一分析表明，满足式(8)的符号 $qgf(a)$ 是 a 的半依比例符号。

定义 4 与定义 7 是等价的，只是在表述形式上存在差异。

4　应　用

计算地图投影或制作地图时，必须将地球(椭球或球)按一定的比率缩小在平面上，这个比率称为地图主比例尺或普通比例尺，也即地图上标注的比例尺。实际上，由于投影中必定存在着某种变形（长度变形、面积变形和角度变形），因此，地图上仅能在某些点或线上保持主比例尺，而图幅的其他位置的比例尺则是或大或小于主比例尺的局部比例尺[16]。这种图幅内不同区域的比例尺差异随着比例尺的缩小和制图区域的扩大而愈加明显。而地图投影的影响就更为突出。在以圆柱投影(如墨卡托投影）、伪圆柱投影、伪方位投影等投影绘制的大洲图、大洋图、半球图、世界图，因式(2)不满足而使“依比例”概念不复存在而不宜使用。本文提出的依比例符号、不依比例符号和半依比例符号系统，适用于1∶100 000及更大比例的地图，因为在大比例尺地图上，虽然与比例尺相关的长度变形依然存在，但因其极为微小，可忽略不计，在全图范围内，用“依比例”概念可对依比例符号的性质作较准确的描述。

5　结束语

地图符号 $qgf(a)$ 是制图物体 a 在 f、g、q 三重拓扑映射下的平面像。通过不同的约束条件，分别对依比例符号、不依比例符号和半依比例符号给出了数学定义。这些定义，从点集变换的角度揭示了依比例符号、不依比例符号和半依比例符号的本质特征和内在联系，使其获得了精密的数学形式和定量描述。

参考文献：

[1] 李占元，李景文，张卫京，等. 地理变量量表的数学定义[J]. 桂林工学院学报，2005，25（1）：62－65.

[2] 钟业勋，胡宝清，朱根雄. 基本地貌形态数学定义体系研究[J]. 桂林工学院学报，2009，29（4）：481－484.

[3] 钟业勋，胡宝清. 地图符号的基本结构和功能[J]. 桂林理工大学学报，2011，31（2）：229－232.

[4] 钟业勋，朱重光，魏文展. 地图空间认知的数学原理[J]. 测绘科学，2005，30（5）：11－12.

[5] 钟业勋. 数理地图学——地图学及其数学原理[M]. 北京：测绘出版社，2007.

[6] 张燕燕，胡毓钜. 地图可视化[J]. 测绘工程，2001，10（1）：27－29.

[7] GB 12342—1990，1∶250 00，1∶500 00，1∶100 000地形图图式[S].

[8] 国家测绘局. 《地籍测绘规范》、《地籍图图式》说明[S]. 北京：国家测绘局，1994.

[9] 钟业勋，朱重光，童新华. 地图表示的物质基础及时空尺度研究[C]//第二届测绘科学前沿技术论坛论文集. 北京：测绘出版社，2010：279－281.

[10] 李孝传，陈玉清. 一般拓扑学导引[M]. 北京：高等教育出版社，1982.

[11] 钟业勋，魏文展，彭月英，等. 地图符号数学定义的研究[J]. 武汉大学学报：信息科学版，2001，26（5）：465－468.

[12] 黄鹄，钟业勋. 依比例符号、不依比例符号和半依比例符号数学定义的改进[J]. 武汉大学学报：信息科学版，2006，31（3）：244－246.

[13] 钟业勋，郑红波. 不同约束条件下地图符号的数学定义[J]. 测绘信息与工程，2007，31（3）：49－50.

[14] 钟业勋，黄鹄. 依比例符号、不依比例符号和半依比例符号数学定义的修改[J]. 海洋测绘，2008，28（4）：19－21.

[15] 罗森，严虹，廖义琴. 几何学概论[M]. 北京：清华大学出版社，2011.

[16] 胡毓钜，龚剑文. 地图投影[M]. 2 版. 北京：测绘出版社，1992.

New Definition of Map Symbol Based on Binding Transformation

ZHONG Ye-xun[1.2]，HU Bao-qing[1]，WANG Huan[2]

（1. a. *Key Laboratory of Beibu Gulf Environment Change and Resources Use*，*Ministry of Education*；b. *School of Resource and Environment Science*，*Guangxi Teachers Education University*，*Nanning* 530001，*China*；2. *Guangxi Regional Geographical Information Bureau of Surveying and Mapping*，*Nanning* 530023，*China*）

Abstract：Mapping object a and map symbol $qgf(a)$ corresponding one by one under f，g，q in three topological mapping，is the essence transformation between points in satisfied condition. In this paper the scale symbol is defined，and non-scale symbol and semi-scale symbol respectively through different binding couditions. Thus these map symbols become precise mathematical form with fixed description.

Key words：scale symbol；non-scale symbol；semi-scale symbol；topological mapping；transformation；binding condition；mathematical deffinition