第33卷 第3期
2013年8月

桂 林 理 工 大 学 学 报
Journal of Guilin University of Technology

Vol. 33 No. 3
Aug. 2013

文章编号：1674－9057(2013)03－0569－05　　doi:10.3969/j.issn.1674－9057.2013.03.031

相依样本非参数回归函数估计的相合性

刘　艳，吴群英，倪　展

（桂林理工大学 理学院，广西 桂林　541004）

摘　要：应用 Priestley 和 Chao 提出的一种加权核估计 $g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{h_n} K\left(\frac{x - x_i}{h_n}\right)$，在 α-混合误差下，讨论了非参数回归函数 $Y_i = g(x_i) + \varepsilon_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ 中 $g(x)$ 的相合性，在较弱的条件下证明了它的一致强相合性。

关键词：α-混合序列，非参数回归函数，加权核估计，一致强相合性

中图分类号：O22.4　　**文献标志码**：A

0　引言及定义

Chanda[1]在1974年首先提出了线性过程是 α-混合的。之后，Gorodeskii[2]、Pham 等[3]进行了进一步讨论。目前已有很多文献研究了其极限性质，如中心极限定理、强大数律、矩不等式，但在 α-混合相依样本下研究具体的统计估计问题涉及的还比较少。而对于大多数经济、金融时间序列而言，样本的独立性不一定成立，因此讨论混合序列的大样本性质是十分必要的。对于参数估计的研究，常用的方法有直方图估计、Parzen 核估计和最近邻估计。在实际应用中，直方图估计虽然方法简单直观，但作出的估计曲线不光滑；最近邻估计中经常会出现不连续的梯度点，比较适合于局部估计；而对于核估计，可以通过对核 $K(x)$ 施加一定条件如光滑和合理选择窗宽，使得估计量与待估计函数的偏差在一定意义下尽可能小。本文则在 α-混合随机变量下讨论了非参数回归函数加权核估计的一致强相合性。

设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是固定点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个观察值，满足模型

$$Y_i = g(x_i) + \varepsilon_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{1}$$

其中：$g(\cdot)$ 是定义在[0,1]上的未知函数，在[0,1]外的取值为0；$\{\varepsilon_i, i \geqslant 1\}$ 是 α-混合随机误差序列，且假定 $0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_n = 1$，为估计 $g(\cdot)$，用 Priestley[4] 提出的加权核估计

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{h_n} K\left(\frac{x - x_i}{h_n}\right), \tag{2}$$

其中：$K(\cdot)$ 是 Borel 可测函数；h_n 为窗宽，记 $\delta_n = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(x_i - x_{i-1})$。

关于 $g_n(x)$ 的相合性很多文献已作过研究，在独立情形下，文献[4]首先讨论了 $g_n(x)$ 的弱相合条件；Benedeti[5] 在一定条件下证明了 $g_n(x)$ 的强相合性。关于负相依样本下密度函数的研究有：杨善朝等[6]在较弱的条件下研究了非参数回归函数加权核估计的相合性；施生塔等[7]研究了 ND 样本最近邻密度估计的一致强相合速度等。φ 混合误差下，杨善朝[8]研究了 $g_n(x)$ 的完全收敛性和强相合性；于德明等[9]在 α-混合随机误差 $\{\varepsilon_i\}$ 满足 $\sum\limits_i P(|\varepsilon_i| \geqslant b_i) < \infty$ 的条件下，证明了回归函数加权核估计的强相合性。本文讨论了在随机误差 $\{\varepsilon_i\}$

收稿日期：2012－10－16

基金项目：国家自然科学基金项目（11061012）；广西高校人才小高地建设创新团队计划项目（桂教人［2011］47）；广西空间信息与测绘重点实验室项目（桂科能1103108－08）；广西研究生教育创新计划项目（2011105960202M32）

作者简介：刘　艳（1988—），女，硕士，研究方向：概率统计，403579567@qq.com。

通讯作者：吴群英，博士，教授，wqy666@glut.edu.cn。

引文格式：刘艳，吴群英，倪展. 相依样本非参数回归函数估计的相合性[J]. 桂林理工大学学报，2013，33(3)：569－573.

为 α- 混合,且 $\sup_{1\leqslant i\leqslant n} \mathrm{E}\mid \varepsilon_i\mid^r < \infty$ 时,存在 $d>0$ 使 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log n}{h_n^{1+\beta}\cdot n^{d\beta-1/r}}\right)^{1/\beta}<\infty$ 的条件下 $g_n(x)$ 的一致强相合性。

本文中 c、c_0、c_1、c_2 是与 n 无关的常数,c 在不同的式子中可以表示不同的值。

1 定理及引理

本文假设以下基本条件成立:

(Ⅰ) $K(\cdot)$ 在 R^1 上有界,满足 β 阶($\beta>0$)Lipschitz 条件,且满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K(u)\mathrm{d}u=1,\int_{-\infty}^{+\infty}\mid K(u)\mid \mathrm{d}u<\infty;$$

(Ⅱ) $g(\cdot)$ 在闭区间[0,1]上满足 α 阶($\alpha>0$)Lipschitz 条件;

(Ⅲ) 当 $n\to\infty$ 时,$h_n\to 0$,$\delta_n\to 0$,且 $\{(\delta_n/h_n)^{\beta}+\delta_n^{\alpha}\}/h_n\to 0$。

定理 1 在模型(1)中,基本条件(Ⅰ)~(Ⅲ)成立,且满足

(i) $\{\varepsilon_i, i\geqslant 1\}$ 为几何 α- 混合随机变量序列,$\mathrm{E}\varepsilon_i=0$,存在 $1/2<\theta<1$,$\delta_n/h_n=O(n^{-\theta})$,$r=2/(1-\theta)$,使 $\sup_{i\geqslant 1}\mathrm{E}\mid\varepsilon_i\mid^r<\infty$;

(ii) 存在 $d>0$ 使 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log n}{h_n^{1+\beta}\cdot n^{d\beta-1/r}}\right)^{1/\beta}<\infty$,则对任意的 $0<\tau<1/2$,有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(\tau,1-\tau)}\mid g_n(x)-g(x)\mid=0,\ \text{a. s.}。\tag{3}$$

定理 2 在模型(1)中,基本条件(Ⅰ)~(Ⅱ)成立,定理 1 中条件(i)成立,则对 $\forall x\in[0,1]$ 有

$$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=g(x),\ \text{a. s.}。$$

下面给出定理 1 的一个推论,在基本条件(Ⅰ)、(Ⅱ)成立情况下,取 $\delta_n=n^{-1}$,$h_n=n^{-l}$,为了满足基本条件(Ⅲ),要求所取的具体化的 δ_n、h_n 满足 $\{(\delta_n/h_n)^{\beta}+(\delta_n)^{\alpha}\}/h_n\to 0$,即使 $n^{-[\beta-l(1+\beta)]}+n^{-(\alpha-l)}\to 0$ 成立,因此,可限制 $l<\min\left(\frac{\beta}{1+\beta},\alpha\right)$ 来保证基本条件(Ⅲ)成立。另一方面,由 $\delta_n/h_n=n^{-(1-l)}\triangleq n^{-\theta}$,即 $\theta=1-l$,为了保证 $1-l$ 满足定理中对 θ 的限制条件,即 $1/2<\theta<1$,可取 $0<l<1/2$,便有 $1/2<1-l<1$。对应于定理条件(ii),取 $r=2/l$,$d>1+l(1+3/(2\beta))$,则 $d-l(1+3/(2\beta))>1$,因此,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\log n}{h_n^{1+\beta}\cdot n^{d\beta-1/r}}\right)^{1/\beta}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^{1/\beta}n}{n^{d-l(1+3/(2\beta))}}<\infty$。

综上分析有以下推论成立。

推论 设基本条件(Ⅰ)、(Ⅱ)成立,$\{\varepsilon_i, i\geqslant 1\}$ 为几何 α- 混合随机变量序列,$\mathrm{E}\varepsilon_i=0$,若 $\delta_n=O(n^{-1})$,$h_n=n^{-l}$,取 l 满足 $0<l<\min\left\{\alpha,\frac{\beta}{(1+\beta)},\frac{1}{2}\right\}$,$r=2/l$,假设 $\sup_{i\geqslant 1}\mathrm{E}\mid\varepsilon_i\mid^r<\infty$,则对任意的 $0<\tau<\frac{1}{2}$,式(3)也成立。

注:定理的条件减弱了对 $K(\cdot)$ 是密度函数的要求,且相比文献[9],减弱了对随机误差 $\{\varepsilon_i, i\geqslant 1\}$ 满足 $\mid\varepsilon_i\mid\leqslant b$, a. s. 的要求,放宽到了 $\sup_{i\geqslant 1}\mathrm{E}\mid\varepsilon_i\mid^r<\infty$,并把文献[10]中研究的 $g_n(x)$ 的强相合性,做到了一致强相合性。

定理的证明需用到以下引理。

引理 1[6] 设基本条件(Ⅰ)~(Ⅲ)成立,则对任给的 $0<\tau<1/2$,有

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(\tau,1-\tau)}\mid \mathrm{E}\,g_n(x)-g(x)\mid=0。\tag{4}$$

引理 2[6] 设基本条件(Ⅰ)、(Ⅲ)成立,则对任意的 $x\in[0,1]$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}\left|K\left(\frac{x-x_i}{h_n}\right)\right|=\int_{-\infty}^{+\infty}\mid K(u)\mid \mathrm{d}u。\tag{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_{i-1}}{h_n}K^2\left(\frac{x-x_i}{h_n}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}K^2(u)\mathrm{d}u。\tag{6}$$

引理 3[11] (α-混合序列的 Bernstein 不等式)设 $\{\eta_i\}$ 是几何 α- 混合的,$\mathrm{E}\,\eta_i=0$,$\mid\eta_i\mid\leqslant 1$,记 $r=\frac{2}{1-\theta}$,$\sigma=\sup(\mathrm{E}\mid\eta_i\mid^r)^{1/r}$,$n^{1/2}\sigma\leqslant 1$,则存在仅依赖于混合系数的常数 c_1、c_2,使得对 $\forall 0<\theta<1$,$\varepsilon>0$ 有

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i\right|>\varepsilon\right)\leqslant c_1\theta^{-1}\exp\left(-\frac{c_2\varepsilon^{1/2}}{n^{1/4}\sigma^{1/2}}\right)。$$

引理 4 设 $\{X_i, i\geqslant 1\}$ 为随机变量序列,如果存在 $1/2<\theta<1$,$r=2/(1-\theta)$,使 $\mathrm{E}\mid X_i\mid=O(i^{-\theta-(r-1)/r})$,则 $\sum_{i=1}^{n}X_i$, a. s. 收敛。

证明:令 $Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$,取 ρ 使 $0<2\rho<\theta-1/r$,

则 $\forall m \geqslant n \geqslant 1$,有

$$\mathrm{E}\mid Y_m - Y_n \mid \leqslant \sum_{i=n+1}^{m} \mathrm{E}\mid X_i \mid \leqslant c\sum_{i=n+1}^{m} i^{-\theta-(r-1)/r}$$

$$= c\sum_{i=n+1}^{m} i^{-(1+2\rho)} \leqslant cn^{-\rho} \to 0。 \tag{7}$$

因此$\{Y_n, n \geqslant 1\}$ 是 L_1 中的 Cauchy 序列,从而存在随机变量 Y 使 $\mathrm{E}\mid Y\mid < \infty$ 且 $\mathrm{E}\mid Y_n - Y\mid \to 0$, $n \to \infty$。又对 $\forall \varepsilon > 0$ 有

$$P(\mid Y_{2^k} - Y\mid > \varepsilon) \leqslant c\mathrm{E}\mid Y_{2^k} - Y\mid \leqslant c\limsup_n \{\mathrm{E}$$

$$\mid Y_{2^k} - Y_n\mid + \mathrm{E}\mid Y_n - Y\mid\} \leqslant c\sum_{i=2^k+1}^{m} i^{-\theta-(r-1)/r} \leqslant c\cdot 2^{-k\rho}.$$

$$P\Big(\max_{2^{k-1}<n\leqslant 2^k} \mid Y_n - Y_{2^{k-1}}\mid > \varepsilon\Big) \leqslant P\Big(\sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \mid X_i\mid > \varepsilon\Big) \leqslant$$

$$c\sum_{i=2^{k-1}+1}^{\infty} \mathrm{E}\mid X_i\mid \leqslant c\sum_{i=2^{k-1}+1}^{\infty} i^{-\theta-(r-1)/r} \leqslant c\cdot 2^{-(k-1)\rho}。由$$

$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\rho} < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)\rho} < \infty$ 及子序列法可知,$Y_n \to Y$, a. s. ,从而有

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \to Y, \text{ a. s. }。$$

2　定理证明

2.1　定理 1 的证明

记 $a_{ni}(x) = \dfrac{x_i - x_{i-1}}{h_n}K\Big(\dfrac{x_i - x}{h_n}\Big)$,根据 $g_n(x)$ 的定义及 $\mathrm{E}\,\varepsilon_i = 0$ 可知

$$g_n(x) - g(x)$$

$$= (g_n(x) - \mathrm{E}\,g_n(x)) + (\mathrm{E}\,g_n(x) - g(x))$$

$$\leqslant \Big|\sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{h_n}K\Big(\frac{x - x_i}{h_n}\Big) -$$

$$\mathrm{E}\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{h_n}K\Big(\frac{x - x_i}{h_n}\Big)\Big)\Big| +$$

$$\mid \mathrm{E}\,g_n(x) - g(x)\mid$$

$$\leqslant \Big|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{x_i - x_{i-1}}{h_n}K\Big(\frac{x - x_i}{h_n}\Big)\Big| +$$

$$\mid \mathrm{E}\,g_n(x) - g(x)\mid$$

$$\leqslant \Big|\sum_{i=1}^{n} a_{ni}(x)\varepsilon_i\Big| + \mid \mathrm{E}\,g_n(x) - g(x)\mid。 \tag{8}$$

由引理 1,则对任给的 $0 < \tau < 1/2$ 有式(4)成立,因此欲证明定理 1,只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in(\tau,1-\tau)} \Big|\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}(x)\varepsilon_i\Big| = 0$, a. s. ,可以记 $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}(x)\varepsilon_i$,即只需要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in(\tau,1-\tau)} \mid S_n(x)\mid = 0$, a. s. 。记

$$\varepsilon_{ni} = \varepsilon_i I_{(\mid\varepsilon_i\mid\leqslant n^{1/r})} - \mathrm{E}\,\varepsilon_i I_{(\mid\varepsilon_i\mid\leqslant n^{1/r})},$$

$$\varepsilon_{ni}^{*} = \varepsilon_i I_{(\mid\varepsilon_i\mid> n^{1/r})} - \mathrm{E}\,\varepsilon_i I_{(\mid\varepsilon_i\mid> n^{1/r})},$$

$$S_{n1}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ni}(x)\varepsilon_{ni},$$

$S_{n2}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ni}(x)\varepsilon_{ni}^{*}$, $S_n(x) = S_{n1}(x) + S_{n2}(x)$。

下证 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in(\tau,1-\tau)} \mid S_{n1}(x)\mid = 0$, a. s. 。

选取 $l(n)$ 个中心在 $t_1, t_2, \cdots, t_{l(n)}$,半径为 $R_n = \Big(\dfrac{h_n^{1+\beta}}{n^{1/r}\log n}\Big)^{1/\beta}$ 的邻域 $B_1, B_2, \cdots, B_{l(n)}$ 覆盖$[0,1]$,其中 $l(n)$ 小于 $O\Big(\Big(\dfrac{h_n^{1+\beta}}{n^{1/r}\log n}\Big)^{-1/\beta}\Big)$。由 $K(\cdot)$ 满足 β 阶 Lipschitz 条件及 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = 1$ 可得

$$\sup_{x\in B_k} \mid S_{n1}(x) - S_{n1}(t_k)\mid$$

$$= \sup_{x\in B_k}\Big|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{h_n}\Big\{K\Big(\frac{x - x_i}{h_n}\Big) - K\Big(\frac{t_k - x_i}{h_n}\Big)\Big\}\varepsilon_i\Big|$$

$$\leqslant ch_n^{-(1+\beta)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\sup_{x\in B_k} \mid x - t_k\mid^{\beta} n^{1/r}$$

$$\leqslant ch_n^{-(1+\beta)} n^{1/r}R_n^{\beta} \leqslant c(\log n)^{-1} \to 0,\ n \to 0。 \tag{9}$$

由式(9)可得

$$P(\sup_{x\in(\tau,1-\tau)} \mid S_{n1}(x)\mid > \varepsilon)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{l(n)} \{P(\sup_{x\in B_j} \mid S_{n1}(x) - S_{n1}(t_j)\mid > \varepsilon) +$$

$$P(\mid S_{n1}(t_j)\mid > \varepsilon)\}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{l(n)} P(\mid S_{n1}(t_j)\mid > \varepsilon)。$$

记 $b_n = c_0 n^{1/2}$, $\eta_i = \dfrac{a_{ni}\varepsilon_{ni}}{b_n}$, $i = 1,2,\cdots n$, $\sigma = \sup\limits_i(\mathrm{E}\mid\eta_i\mid^r)^{1/r}$,由引理 3 知 $\mathrm{E}\,\eta_i = 0$, $\sigma = \sup\limits_i(\mathrm{E}\mid\eta_i\mid^r)^{1/r} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\mathrm{E}\mid\eta_i\mid^r)^{1/r}$,则可取到充分大的 c_0 使

$$\mid\eta_i\mid = \Big|\frac{a_{ni}\varepsilon_{ni}}{b_n}\Big| \leqslant \Big|\frac{cn^{-\theta}n^{1/r}}{b_n}\Big| \leqslant 1, \tag{10}$$

$$n^{1/2}\sigma = n^{1/2}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Big\{\frac{a_{ni}(\mathrm{E}\mid\varepsilon_{ni}\mid^r)^{1/r}}{b_n}\Big\}$$

$$\leqslant cn^{1/2}n^{-\theta}b_n^{-1} \leqslant 1, \tag{11}$$

由引理 3 的 Bernstein 不等式有

$$P(\mid S_{n1}(t_j)\mid > \varepsilon) = P\Big(\frac{\mid a_{ni}(t_j)\varepsilon_{ni}\mid}{b_n} > \frac{\varepsilon}{b_n}\Big)$$

$$\leqslant c_1\theta^{-1}\exp\Big(-\frac{c_2(\varepsilon/b_n)^{1/2}}{n^{1/4}\sigma^{1/2}}\Big)$$

$$= c_1\theta^{-1}\exp\left(-\frac{c_2\varepsilon^{1/2}}{b_n^{1/2}n^{1/4}\sigma^{1/2}}\right),$$

又因为

$$(b_n n^{1/2}\sigma)^{1/2}\log n = \left(b_n n^{1/2}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\frac{a_{ni}(\mathrm{E}\mid\varepsilon_{ni}\mid^r)^{1/r}}{b_n}\right)\right)^{1/2}$$

$\leqslant c(n^{-(\theta-1/2)})^{1/2}\log n\to 0, n\to\infty$,所以存在$M>0$,可记$d=\frac{c_2\varepsilon^{1/2}}{M}>0$,则有

$$\exp\left(-\frac{c_2\varepsilon^{1/2}}{b_n^{1/2}n^{1/4}\sigma^{1/2}}\right)\leqslant n^{-c_2\varepsilon^{1/2}/M}=n^{-d},$$

故由条件(ii)可得$\sum P(\sup_{x\in(\tau,1-\tau)}\mid S_{n1}(x)\mid>\varepsilon)\leqslant\sum l(n)n^{-d}<\infty$。

由 Borel-Cantelli 引理可得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(\tau,1-\tau)}\mid S_{n1}(x)\mid=0,\ \text{a.s.}。\tag{12}$$

下证$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(\tau,1-\tau)}\mid S_{n2}(x)\mid=0$, a.s.。

$$\sup_{x\in(\tau,1-\tau)}\mid S_{n2}(x)\mid=\max_{1\leqslant j\leqslant l(n)}\sup_{x\in B_j}\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}(x)\varepsilon_{ni}^{*}\right|$$

$$=\max_{1\leqslant j\leqslant l(n)}\sup_{x\in B_j}\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}(x)\varepsilon_i I_{(\mid\varepsilon_i\mid>n^{1/r})}\right|+$$

$$\max_{1\leqslant j\leqslant l(n)}\sup_{x\in B_j}\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}(x)\mathrm{E}\,\varepsilon_i I_{(\mid\varepsilon_i\mid>n^{1/r})}\right|$$

$$=I_1+I_2。$$

由引理2有

$$I_2\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant l(n)}\sup_{x\in B_j}\sum_{i=1}^{n}\mid a_{ni}(x)\mid\mathrm{E}\mid\varepsilon_i\mid I_{(\mid\varepsilon_i\mid>n^{1/r})}\leqslant cn^{-(r-1)/r}\to 0,$$

$$I_1\leqslant c\max_{1\leqslant j\leqslant l(n)}\sup_{x\in B_j}\frac{\delta_n}{h_n}\sum_{i=1}^{n}\mid\varepsilon_i\mid I_{(\mid\varepsilon_i\mid>n^{1/r})}\leqslant cn^{-\theta}\sum_{i=1}^{n}\mid\varepsilon_i\mid I_{(\mid\varepsilon_i\mid>n^{1/r})}\leqslant cn^{-\theta}\sum_{i=1}^{n}\mid\varepsilon_i\mid I_{(\mid\varepsilon_i\mid>i^{1/r})}。$$

记$\xi_i=i^{-\theta}\mid\varepsilon_i\mid I_{(\mid\varepsilon_i\mid>i^{1/r})}$,则$\mathrm{E}\,\xi_i=i^{-\theta}\mathrm{E}\mid\varepsilon_i\mid I_{(\mid\varepsilon_i\mid>i^{1/r})}\leqslant c\cdot i^{-\theta-(r-1)/r}$,由引理4可知$\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i$几乎处处收敛,从而由Kronecker引理有$I_1\to 0$, a.s.,于是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(\tau,1-\tau)}\mid S_{n2}(x)\mid=0,\ \text{a.s.}。\tag{13}$$

综合式(12)、(13)可知

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(\tau,1-\tau)}\mid g_n(x)-g(x)\mid=0,\ \text{a.s.}。$$

定理证毕。

由文中分析可知推论的条件满足定理1的条件,因此推论的结论也是成立的。

2.2 定理2的证明

同定理1证明中式(8),显然有

$$g_n(x)-g(x)\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}(x)\varepsilon_i\right|+\mid\mathrm{E}\,g_n(x)-g(x)\mid。$$

由引理1可知,对$\forall x\in[0,1]$都有$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\,g_n(x)=g(x)$,因此欲证明定理2只需要证明$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}(x)\varepsilon_i\right|=0$, a.s.,以下同定理1中相同记号标记,即证$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0$, a.s.。首先证明$\lim_{n\to\infty}S_{n1}(x)=0$, a.s.。

对照式(10)、(11),可直接运用引理3有

$$P(\mid S_{n1}(x)\mid>\varepsilon)=P\left(\frac{\mid a_{ni}(x)\varepsilon_{ni}\mid}{b_n}>\frac{\varepsilon}{b_n}\right)\leqslant c_1\theta^{-1}\exp\left(-\frac{c_2(\frac{\varepsilon}{b_n})^{1/2}}{n^{1/4}\sigma^{1/2}}\right)=c_1\theta^{-1}\exp\left(-\frac{c_2\varepsilon^{1/2}}{b_n^{1/2}n^{1/4}\sigma^{1/2}}\right)。$$

由定理1中证明可知,当$n\to\infty$时有$(b_n n^{1/2}\sigma)^{1/2}\log n\to 0$,故存在$M=\frac{1}{2}c_2\varepsilon^{1/2}$,有

$$P(\mid S_{n1}(x)\mid>\varepsilon)\leqslant c_1\theta^{-1}n^{-c_2\varepsilon^{1/2}/M}=c_1\theta^{-1}n^{-2}。$$

由 Borel-Cantelli 引理可得

$$\lim_{n\to\infty}S_{n1}(x)=0,\ \text{a.s.}。\tag{14}$$

下证$\lim_{n\to\infty}S_{n2}(x)=0$, a.s.。

$$\mid S_{n2}(x)\mid\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}(x)\varepsilon_i I_{(\mid\varepsilon_i\mid>n^{1/r})}\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}a_{ni}(x)\mathrm{E}\,\varepsilon_i I_{(\mid\varepsilon_i\mid>n^{1/r})}\right|=I_1'+I_2'。$$

对比定理1中相应证明,由$a_{ni}(x)$的定义及引理4有

$$I_1'\leqslant c\frac{\delta_n}{h_n}\sum_{i=1}^{n}\mid\varepsilon_i\mid I_{(\mid\varepsilon_i\mid>n^{1/r})}\leqslant cn^{-\theta}\sum_{i=1}^{n}\mid\varepsilon_i\mid I_{(\mid\varepsilon_i\mid>n^{1/r})}\to 0,\ \text{a.s.}。$$

由引理2有

$$I_2'\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mid a_{ni}(x)\mid\mathrm{E}\mid\varepsilon_i\mid I_{(\mid\varepsilon_i\mid>n^{1/r})}\leqslant cn^{-(r-1)/r}\to 0,$$

故有$\lim_{n\to\infty}S_{n2}(x)=0$, a.s.,结合式(14)可得

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0,\ \text{a.s.}。$$

定理证毕。

3 随机模拟

参照文献[12]作如下模拟分析:从时间序列AR(1)模型$\varepsilon_{nt}=\varphi\varepsilon_{n,t-1}+\omega_{nt}$($\omega_{nt}$独立且服从正态分布)中随机产生一列$\alpha$-混合样本。取$g(x)=$

$\cos(2\pi x)$，用 Matlab 做 $g_n(x)$ 模拟 $m(x)$ 如图 1 所示。

比较图 1a 和图 1b，当取定 $\varphi = 0.2$ 时，随着样本数 n 的增多，拟合的效果也更好；比较图 1b 和图 1c，当取定样本数 $n = 1\,000$，随着 φ 的变大，拟合效果变差。而 φ 的大小说明了 α-混合序列样本之间的相依性。通过模拟，可以看出估计 $g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{h_n} K\left(\frac{x - x_i}{h_n}\right)$ 能够较好地拟合 $g(x)$。

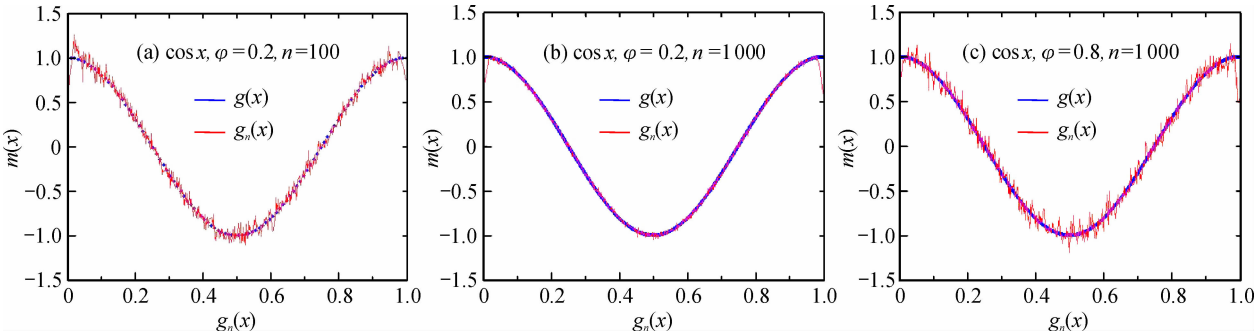


图 1　α-混合样本模拟

Fig. 1　Simulation of α-mixing sequence samples

参考文献：

[1] Chanda K C. Strong mixing properties of linear stochastic processes [J]. Journal of Applied Probability, 1974, 11: 401 – 408.

[2] Gorodeskii V V. On the strong mixing property for linear sequences [J]. Theory of Probability and Their Applications, 1977, 22: 411 – 413.

[3] Plan T D, Tran L T. Some mixing properties of time series models[J]. Stoch. Process. Appl., 1985, 19: 297 – 303.

[4] Priestley M B, Chao M T. Nonparametric function fitting [J]. J. R. Statist. Soc. Ser. B, 1972, 34: 385 – 392.

[5] Benedetti J K. On the nonparametric estimation of regression functions[J]. J. R. Statist. Soc. B. 1977, 39: 248 – 253.

[6] 杨善朝，王岳宝. NA 样本回归函数估计的强相合性，应用数学学报 [J]. 1999, 22 (3): 522 – 530.

[7] 施生塔，吴群英，倪展. ND 样本最近邻密度估计的一致强相合速度 [J]. 桂林理工大学学报，2012, 32 (4): 631 – 634.

[8] 杨善朝. φ-混合误差下非参数回归函数加权核估计的相合性 [J]. 高校应用数学学报，1995, 10 (2): 173 – 179.

[9] 于德明，王勤，王珍娥. α-混合误差下回归函数加权核估计的强相合性 [J]. 浙江工业大学学报，2006, 34 (4): 470 – 472.

[10] 秦永松. 非参数回归函数估计的一个结果 [J]. 工程数学学报，1989, 6 (3), 120 – 123.

[11] 吴月琴，柴根象. α-混合序列的最近邻密度估计 [J]. 同济大学学报，2003, 31 (5): 605 – 609.

[12] 蒙玉波. α-混合序列下 Priestley-Chao 回归估计的大样本性质 [D]. 广西：广西师范大学，2012.

Convergence of Estimator of Nonparametric Regression Function Under Dependent Sequence

LIU Yan, WU Qun-ying, NI Zhan

(*College of Science*, *Guilin University of Technology*, *Guilin* 541004, *China*)

Abstract: Based on the weighted kernel estimation $g_n(x) = \sum_{i=1}^{n} Y_i \frac{x_i - x_{i-1}}{h_n} K\left(\frac{x - x_i}{h_n}\right)$ by Priestley and Chao in this paper, the convergence of weighted kernel estimation of $g(x)$ in nonparametric regression function $Y_i = g(x_i) + \varepsilon_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ for α-mixing sequence is discussed under more weaker conditions. The uniform strong convergence is proved.

Key words: α-mixing sequence; nonparametric regression function; weighted kernel estimation; uniform strong convergence