文章编号：1674－9057(2012)04－0532－05 doi:10.3969/j.issn.1674－9057.2012.04.015

基于改进的 Kriging 法区域似大地水准面精化

黄良珂，刘立龙，唐艳新，姚朝龙，邓康成

（桂林理工大学 a. 测绘地理信息学院；b. 广西空间信息与测绘重点实验室，广西 桂林 541004）

摘 要：利用常规的 Kriging 法进行 GPS 高程拟合时，由于模型误差和公共点误差的存在，其拟合内符合精度值并不为零。通过对已知点拟合残差进行改正得到一种改进的 Kriging 法来精化区域似大地水准面。通过实测数据对比改进的 Kriging 法与 Kriging 法的 GPS 高程拟合精度，结果表明：改进的 Kriging 法的拟合精度明显优于 Kriging 法，该方法能有效削弱模型误差和公共点误差引起的拟合残差。

关键词：Kriging 法；改进的 Kriging 法；区域似大地水准面精化；拟合精度

中图分类号：P223.7 **文献标志码**：A

0 引 言

我国似大地水准面精度达到了 15′×15′的分辨率[1]，平均精度优于 ±0.5 m，在 105°E 以东地区接近 ±0.3 m，以西地区接近 ±0.6 m，在部分省市，已经建立了 2′×2′分辨率的似大地水准面[2]。然而在许多工程中由于成本和保密问题，无法获取上述资料，因此在特定区域获得低成本的似大地水准面显得十分有意义。

要进行区域似大地水准面的精化必须求解高程异常 ξ，基于似大地水准面的正常高 H_r 与基于参考椭球面的大地高 H 的转换关系[3]为

$$H_r = H - \xi。 \tag{1}$$

因此，要精化某区域的似大地水准面，可在该区域布设一定数量的 GPS 控制点，对这些控制点进行 GPS 三维平差，设法对部分 GPS 控制点进行水准联测，则可以求出 GPS 水准联测点的高程异常 ξ，从而根据这些点的高程异常拟合出整个测区的似大地水准面的数字模型，通过数字模型就能内插出该区域的高程异常值。目前，求解高程异常值常用的方法有补偿最小二乘估计法[4]、神经网络法[5]、Kriging 插值法[6－7]、分区拟合法[8]等。文献[6－8]方法具有适用复杂山区的优势，但不能消除模型误差，文献[4]方法能消除模型误差，但若选取的公共点存在误差又难以检验出来时，以上方法就不能有效地处理了。针对以上不足，本文提出一种改进的 Kriging 法，即采用距离平方反比加权法对已知拟合点残差进行分配，进而对检核点拟合残差进行改正，由于采用距离平方反比定权能较好地反映已知点和待定点之间的相关性，故通过该方法能有效地消弱模型误差和公共点误差，并通过实测数据对比分析了改进的 Kriging 法与 Kriging 法的 GPS 高程拟合精度。同时，在利用改进的 Kriging 法进行 GPS 高程拟合时，还分别探讨了不同的距离分组组数求解变异函数时对拟合精度的影响和已知点的点位分布对拟合精度的影响。

1 拟合模型和原理

1.1 Kriging 法数学模型和原理

Kriging 法是由南非学者 Danie Krige 提出，是

收稿日期：2011－10－31

基金项目：国家自然科学基金项目（41064001）；广西自然科学基金项目（2012GXNSFAA053183）；广西科技攻关项目（桂科攻 0816006－4）；广西研究生教育创新计划项目（2010105960816M29）

作者简介：黄良珂（1986—），男，硕士研究生，研究方向：测绘信息采集与数据处理，huangliangke999@163.com。

通讯作者：刘立龙，博士，教授，研究方向：GPS 技术及应用。

引文格式：黄良珂，刘立龙，唐艳新，等. 基于改进的 Kriging 法区域似大地水准面精化［J］. 桂林理工大学学报，2012，32(4)：532－536.

建立在变异函数理论和结构分析的基础上对区域化变量取值进行最优无偏估计的一种方法，该方法能最大限度地利用空间取样提供的各种信息。记研究区域为 Ω_0，区域化变量为 $\{\xi(x) \in \Omega_0\}$，x 表示空间位置，$\xi(x)$ 在采样点 $x_i(i = 1,2,\cdots n)$ 处的属性值为 $\xi(x_i)$，由 Kriging 原理[6] 可知，未知采样点 x_0 处的真值 $\xi(x_0)$ 的最优无偏估计值 $\hat{\xi}(x_0)$ 可由 n 个已知采样点属性值的加权和得到，其一般公式为

$$\hat{\xi}(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi(x_i)。 \tag{2}$$

式中：$\lambda_i(i = 1,2,3,\cdots n)$ 为待求权系数。此处的权系数不是一般的由距离决定，它是满足无偏性和最小方差性的条件下，依赖于变异函数的计算结果而确定的，其估算服从无偏条件，有

$$E[\hat{\xi}(x_0) - \xi(x_0)] = 0, \tag{3}$$

由此得到其无偏条件为

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1。 \tag{4}$$

最小方差性是指估计值与真值之间偏差的平方的数学期望达到最小，即

$$E[(\hat{\xi}(x_0) - \xi(x_0))^2] = \min。 \tag{5}$$

根据拉格朗日乘数法，令 $F = \mathrm{var}[\hat{\xi}(x_0) - \xi(x_0)] - 2\mu\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i - 1\right)$，对 λ_i、μ 求偏导，有

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0。 \tag{6}$$

由式(6) 得到 Kriging 方程组为

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{cov}(x_i,x_j) + \mu = \mathrm{cov}(x_i,x_0), \ i = 1,2,\cdots,n; \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1。 \end{cases} \tag{7}$$

式中：μ 为拉格朗日系数，将协方差 $\mathrm{cov}(x_i,x_j)$ 用变异函数 $\gamma(x_i,x_j)$ 表示为

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \gamma(x_i,x_j) + \mu = \gamma(x_i,x_0), \ i = 1,2,\cdots,n; \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1。 \end{cases} \tag{8}$$

记 $\xi(x,y)$ 为区域化变量(本文 $\xi(x,y)$ 为高程异常)，且是二阶平稳的，由式(2) 知拟合点 (x_0,y_0) 处的高程异常的最佳估计值为

$$\hat{\xi}(x_0,y_0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi(x_i,y_i)。 \tag{9}$$

由 Kriging 原理知，若想求出 λ_i，必须首先确定变异函数，对于 GPS 高程拟合一般采用变异函数的球面模型[7]，其表达式为

$$\gamma(h) = C_0 + C\left(\frac{3h}{2a} - \frac{h^3}{2a^3}\right), \tag{10}$$

式中：C_0 为块金常数，C 为拱高，a 为变程。从变异函数的模型可以看出，要确定模型参数 (C_0,C,a)，需要构造一组距离信息，为此，首先计算出任意两已知点间的距离 h_{ij}，然后根据实际情况按照一定的间距对距离进行分组，并计算出各距离组对应的变异函数的估计值 $\hat{\gamma}(h_k)$，其表达式为

$$\hat{\gamma}(h_k) = \frac{1}{N(h_k)} \sum_{i=1}^{N(h_k)} \sigma_i^2, \ k = 1,2,\cdots,m, \tag{11}$$

式中：k 为距离分组组数；$N(h_k)$ 是距离为 h_k 时的点对的数目；σ_i^2 为对应的高程异常的方差，本文 $\sigma_i^2 = [\xi(x_i,y_i) - \xi(x_j,y_j)]^2$。根据得到的 $\hat{\gamma}(h_k)$，代入式(10) 利用最小二乘法求出参数 (C_0,C,a)，再将求出的变异函数模型代入式(8) 可求得权系数，其矩阵表达式为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(x_1,x_1) & \gamma(x_1,x_2) & \cdots & \gamma(x_1,x_n) & 1 \\ \gamma(x_2,x_1) & \gamma(x_2,x_2) & \cdots & \gamma(x_2,x_n) & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma(x_n,x_1) & \gamma(x_n,x_2) & \cdots & \gamma(x_n,x_n) & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \gamma(x_1,x_0) \\ \gamma(x_2,x_0) \\ \cdots \\ \gamma(x_n,x_0) \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

将解出的 λ 代入式 (9) 则可求出各待定拟合点的高程异常值。

1.2　改进的 Kriging 法模型

由于公共已知点误差和模型误差的存在，使得利用最小二乘法求解的 GPS 高程拟合残差的内符合精度值并不等于零，为了解决这一问题，在原有的 Kriging 原理和模型基础上进行改进。将公共已知点的拟合高程异常值 (Kriging 法拟合) 改正为公共已知高程异常值，对非公共点 (本文为检核点) 拟合高程异常值进行相应的改正。首先，计算公共已知点的改正数

$$V_i = \xi(x_i,y_i) - \hat{\xi}(x_i,y_i), \quad (13)$$

式中：$\xi(x_i,y_i)$ 为公共已知点高程异常值，$\hat{\xi}(x_i,y_i)$ 为相应的拟合高程异常值，则对非公共点（本文为检核点）的改正数为

$$V_j = \sum_{i=1}^{n} P_i V_i / \sum_{i=1}^{n} P_i,\ P_i = \frac{1}{S_i^2}。 \quad (14)$$

其中：$S_i^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$，$P_i$ 为第 i 个公共已知点到第 j 个非公共点的权，S_i 是它们之间的距离，由此得到非公共点（检核点）改正后的高程异常值

$$\bar{\xi}(x_j,y_j) = \hat{\xi}(x_j,y_j) + V_j。 \quad (15)$$

2 GPS 高程拟合精度评定

2.1 内符合精度

根据参与拟合计算的已知点的高程异常值 $\xi_i(x,y)$ 与拟合的高程异常值 ξ_i，则拟合残差 $v = \xi_i(x,y) - \xi_i$，那么 GPS 水准拟合的内符合精度计算表达式为

$$\mu_0 = \pm \sqrt{[vv]/(n-1)}。 \quad (16)$$

式中：n 为参与拟合计算的已知点个数。

2.2 外符合精度

根据检核点高程异常值 $\xi_i(x,y)$ 与拟合高程异常值 ξ_i 之差，可知 GPS 水准拟合的外符合精度的计算表达式为

$$M = \pm \sqrt{[vv]/(n-1)}。 \quad (17)$$

式中：n 为检核点个数。μ_0、M 可近似地认为是拟合点的高程中误差。

3 实例分析

本文采用某地区实测数据[9]共 14 个控制点，其坐标和大地高按国家 B 级 GPS 网施测，正常高按二等水准施测，其点位分布如图 1 所示。

本文为了研究不同距离分组组数求解变异函数时对拟合精度的影响，均匀选取测区 8 个点作为已知点，剩余 6 个点作为检核点，通过 VB 编制程序计算不同距离分组组数与拟合精度如表 1 所示。可以看出，利用改进的 Kriging 法进行 GPS 高程拟合，在求解变异函数时，距离分组组数越多，其拟合精度并非显著提高，反而拟合精度随之降低，则本文算例选用分组组数为 6 时最佳。

为了研究已知点点位分布对 GPS 高程拟合精度的影响，亦均匀选取测区 8 个点作为已知点，剩余 6 个点作为检核点，本文对已知点点位分布采取了 4 个不同的分布方案，其已知点组合情况如表 2 所示。

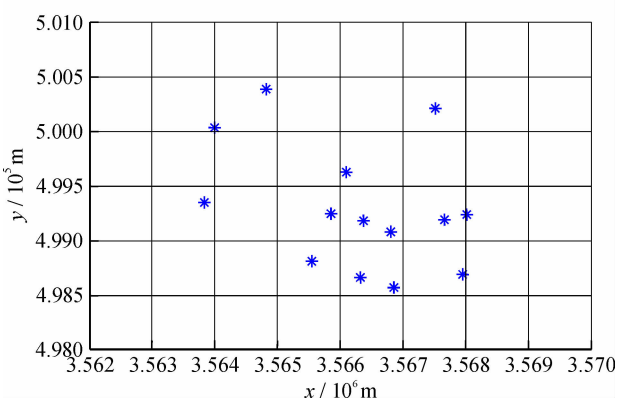


图 1 点位分布图

Fig. 1 Distribution of points

表 1 不同分组组数与拟合精度比较

Table 1 Comparison of fitting accuracy in different groups

mm

分组组数	4	5	6	7	8	9
拟合中误差	30.1	10.5	10.4	17.8	17.7	13.6

表 2 不同已知点布设方案说明

Table 2 Layout scheme in different known points

方案	已知点点号组合	点位分布
方案 1	J4 J5 J6 J9 J10 J21 J22 J26	均匀分布
方案 2	J5 J9 J10 J11 J22 J23 J26 J28	测区外围
方案 3	J2 J4 J5 J6 J9 J10 J20 J21	测区内部
方案 4	J5 J10 J20 J21 J22 J23 J26 J28	测区一端

根据表 2 的布设方案，将 Kriging 法与改进的 Kriging 法进行对比分析，其 GPS 高程拟合结果如图 2～图 5 所示，则不同方案的 GPS 高程拟合精度如表 3 和表 4 所示。可知，对于 Kriging 法，方案 1 的 GPS 高程拟合精度最优，其拟合残差最小值为 0.7 mm，最大为 19 mm；方案 2 和方案 3 次之，但是靠近已知点的检核点却能保证其较高拟合精度，如方案 2 的 J8 和 J20 号点，方案 3 的 J8 和 J28 号点其拟合精度较高；方案 4 拟合精度最差，其拟合残差最小值分别为 0.4 mm，最大分别为 57.4 mm，因此已知点选择在测区一端时，其拟合精度最差，且外推时其精度随着离已知点距离增加而减小，如 J11 号点精度最差。而对于改进的 Kriging 法，方案1拟合精度亦是最优，其拟合残差最小值为

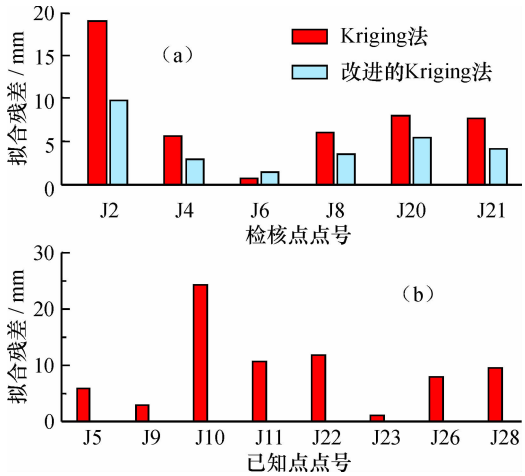


图 2　方案 1 Kriging 法与改进的 Kriging 法拟合残差对比

Fig. 2　Fitting residual error contrast with Kriging and the improved method in Scheme 1

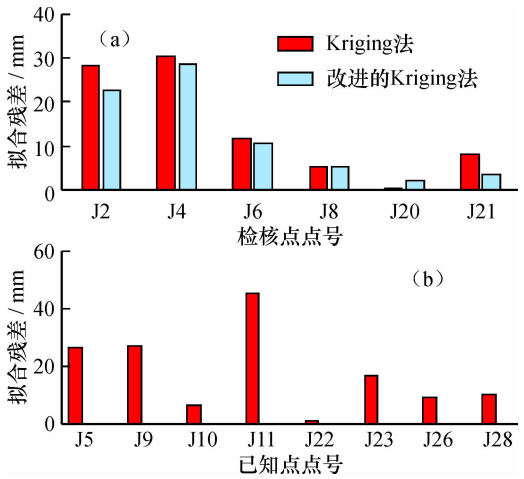


图 3　方案 2 Kriging 法与改进的 Kriging 法拟合残差对比

Fig. 3　Fitting residual error contrast with Kriging and the improved method in Scheme 2

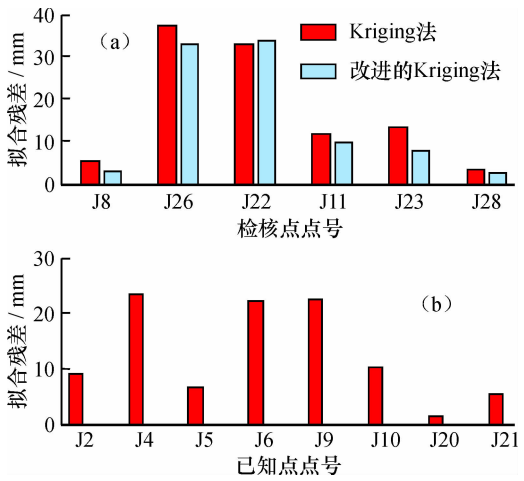


图 4　方案 3 Kriging 法与改进的 Kriging 法拟合残差对比

Fig. 4　Fitting residual error contrast with Kriging and the improved method in Scheme 3

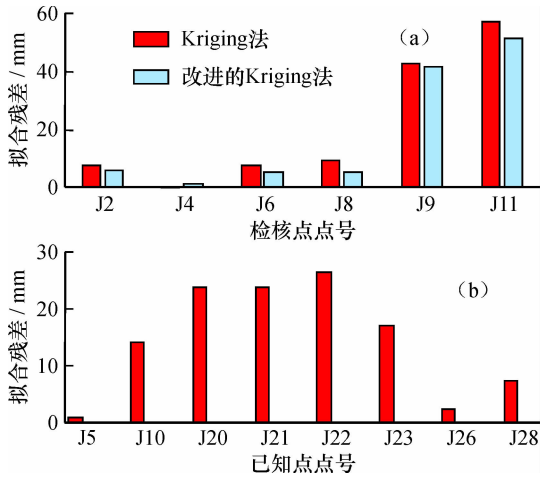


图 5　方案 4 Kriging 法与改进的 Kriging 法拟合残差对比

Fig. 5　Fitting residual error contrast with Kriging and the improved method in Scheme 4

表 3　不同方案拟合精度统计

Table 3　Statistics of fitting accuracy in different schemes

mm

方案	Kriging 法			改进的 Kriging 法		
	最大残差	最小残差	平均残差	最大残差	最小残差	平均残差
方案 1	19.0	0.7	7.8	9.8	1.4	4.5
方案 2	30.5	0.3	14.1	28.7	2.2	12.2
方案 3	37.4	3.2	17.4	33.6	2.5	14.8
方案 4	57.4	0.4	20.7	51.8	1.4	18.5

表 4　不同方案拟合精度对比

Table 4　Comparison of fitting accuracy in different schemes

mm

方案	Kriging 法		改进的 Kriging 法	
	内符合精度	外符合精度	内符合精度	外符合精度
方案 1	12.1	10.5	0.0	5.7
方案 2	23.8	19.9	0.0	18.4
方案 2	316.1	23.9	0.0	21.8
方案 4	18.3	32.5	0.0	30.0

1.4 mm，最大为 9.8 mm，方案 4 拟合精度也是最差，其拟合残差最小值为 1.4 mm，最大为 51.8 mm。由此可知进行 GPS 高程拟合时不宜进行外推，随着外推距离增加其拟合精度随之降低，则 GPS 高程拟合精度与公共已知点在测区的分布有关，当公共已知点均匀分布在测区时，GPS 高程拟合精度最高。

由图 2～图 5 可知，在 4 种不同的方案中改进的 Kriging 法其拟合残差值均低于 Kriging 法，由表 4 易知，在 4 种不同方案中改进的 Kriging 法其拟合外符合精度和内符合精度均优于 Kriging 法，因

此，采用改进的 Kriging 法进行 GPS 高程拟合能有效地削弱模型误差和已知点误差，从而得到更精确的似大地水准面模型。

4 结 论

利用 Kriging 法进行 GPS 高程拟合时，其拟合精度与距离分组组数和已知点在测区的分布有关，本文算例分组组数为 6 时最佳，且公共已知点均匀分布在测区时，能取得较好的拟合精度。通过实测数据计算分析，改进的 Kriging 法其拟合外符合精度和内符合精度均明显优于 Kriging 法，且改进的 Kriging 法能有效地削弱模型误差和已知点误差。由于本文数据来源有限，本文提出的改进的 Kriging 法在实践中有待进一步验证，限于篇幅，本文未对公共已知点数量与拟合精度的关系进行分析。

参考文献：

[1] 黄俊华，陈文森. 连续运行卫星定位综合服务系统建设与应用［M］. 北京：科学出版社，2009.

[2] 宁津生，罗志才，李建成，等. 我国省市级大地水准面精化的现状及技术模式［J］. 大地测量与地球动力学，2004，24（1）：4－8.

[3] 刘基余. GPS 卫星导航定位原理与方法［M］. 北京：科学出版社，2003.

[4] 高宁，高彩云，徐长海. 补偿最小二乘估计在确定高程异常中的应用［J］. 测绘科学，2011，36（1）：35－37.

[5] 韩硕. 神经网络在 GPS 高程拟合中的应用［J］. 测绘通报，2006（4）：48－50.

[6] 张小红，程世来，许晓东. 基于 Kriging 统计的 GPS 高程拟合方法研究［J］. 大地测量与地球动力学，2007，27（2）：47－50.

[7] 李明，高星伟，文汉江，等. Kriging 方法在 GPS 水准拟合中的应用［J］. 测绘科学，2009，34（1）：106－107.

[8] 高伟，卢秀山. GPS 高程区域似大地水准面的分区拟合与平滑连接［J］. 测绘通报，2000（7）：11－15.

[9] 胡伍生，高成发. GPS 测量原理及其应用［M］. 北京：人民交通出版社，2002.

Area Quasi-Geoid Refine Based on Improved Kriging Method

HUANG Liang-ke，LIU Li-long，TANG Yan-xin，YAO Chao-long，DENG Kang-cheng

（a. *College of Geomatics and Geoinformation*；b. *Guangxi Key Laboratory of Spatial Information and Geomatics*，*Guilin University of Technology*，*Guilin* 541004，*China*）

Abstract：When Kriging method is used in GPS elevation fitting，its accuracy is above zero because of the model errors and common point errors. An improved Kriging method is introduced to refine area quasi-geoid by correcting the fitting residual of the known point. Analysis of GPS elevation fitting accuracy through the Kriging method and the improved Kriging method by the measured data shows that the improved Kriging method has high accuracy than Kriging method，and can reduce the model errors and common point errors effectively.

Key words：Kriging method；improved kriging method；area quasi-geoid refine；fitting accuracy