文章编号：1674－9057(2017)01－0068－09 doi:10.3969/j.issn.1674－9057.2017.01.009

多自由度 Maxwell 结构基于传递矩阵法的风振响应解析法

邹万杰，郭昭君，李创第

（广西科技大学 土木建筑工程学院，广西 柳州 545006）

摘 要：对多自由度带 Maxwell 阻尼器的高层耗能结构响应进行了研究。首先，将多自由度结构用固有振型展开，得到等效运动方程。由于该方程不具有经典阻尼，利用传递矩阵法求解，得到了广义位移及广义速度的解析表达式。进而利用随机振动理论，将结构位移和速度的响应方差分解为系列标准振子位移与速度响应方差的线性组合，获得了耗能结构基于规范 Davenport 风谱对应的以固有振型表示的结构随机响应和等效风荷载的解析解，即建立了带 Maxwell 结构的随机风振响应的分析方法。算例分析表明了该方法的正确性。

关键词：多自由度 Maxwell；解析解；等效风荷载取值；随机风振响应

中图分类号：TU528.01 **文献标志码**：A

随着经济的发展，部分建筑结构朝着“越来越高、越来越细”的方向发展，在美观得到提高的同时也造成了建筑结构的水平刚度过小、水平风荷载引起的反应过大等不利情况，添加粘弹性线性阻尼器是解决上述问题的很好选择[1－3]。随着粘弹性阻尼器越来越多地应用于高层以及超高层建筑结构的抗风设计中，对其研究有着很重大的意义[2]。当线性粘弹性阻尼器考虑支撑影响时，可用 Maxwell 模型描述，即将支撑刚度和原 Maxwell 模型中的弹性元件刚度串联得到修正刚度[4]。目前，带 Maxwell 阻尼器耗能结构的风振响应一般采用频域法获得近似的响应方差[5]，或利用数值积分[6]和随机平均法求近似解[7]。精确方法有复模态法，但其缺点是复模态法物理意义不明确，工程人员难以理解[3]，况且，现有的计算方法均建立在近似实数响应解耦基础上，近似法的精度有待提高。针对这一问题，本文利用传递矩阵法获得耗能结构经振型展开的响应时域精确解，明确精确解的物理意义，利于后期分析。

1 运动方程

设结构的质量、刚度和阻尼矩阵分别为 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{C}$，层间质量、刚度和阻尼分别为 m_i、k_i 和 c_i，其中 $i=1,2,\cdots,n$。每层设置 n_i 个带支撑的 Maxwell 阻尼器，阻尼器的刚度、阻尼及支撑刚度分别为 $k_{\mathrm{d}i}$、c_{0i}、$k_{\mathrm{b}i}$，$\boldsymbol{x}_0$ 是结构相对于地面的位移向量。在外部 Davenport 风荷载 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}}(t)$ 作用下，结构的计算简图如图 1 所示。

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}_0+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}_0+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}}(t); \tag{1}$$

$$P_1(t)+\lambda_1\dot{P}_1(t)=c_{01}x_{01}; \tag{2}$$

$$P_i(t)+\lambda_i\dot{P}_i(t)=c_{0i}(x_{0i}-x_{0(i-1)}),i=2,3,\cdots,n。 \tag{3}$$

收稿日期：2015－10－10

基金项目：国家自然科学基金项目（51468005）；广西自然科学基金项目（2011GXNSFA018032；2014GXNSFAA118315）

作者简介：邹万杰（1974—），男，博士，副教授，研究方向：结构抗震，705450818@qq.com。

引文格式：邹万杰，郭昭君，李创第. 多自由度 Maxwell 结构基于传递矩阵法的风振响应解析法［J］. 桂林理工大学学报，2017，37（1）：68－76.

由式(1) 和式(2) 得

$$P_1(t) = k_{01}\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha_i(t-\tau)}x_{01}(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{4}$$

$$P_i(t) = k_{0i}\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha_i(t-\tau)}[\dot{x}_{0i}(\tau) - \dot{x}_{0(i-1)}(\tau)]\mathrm{d}\tau, \tag{5}$$

式中：$\alpha_i = \dfrac{1}{\lambda_i}, i = 1,2,\cdots,n$。

将运动方程按第一振型展开，设

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{\psi}_1 x_1, \tag{6}$$

式中：$\boldsymbol{\psi}_1 = [\psi_{11} \quad \psi_{12} \quad \cdots \quad \psi_{1n}]^{\mathrm{T}}$ 为结构的一振型，x_1 为原结构对应的振型广义坐标。

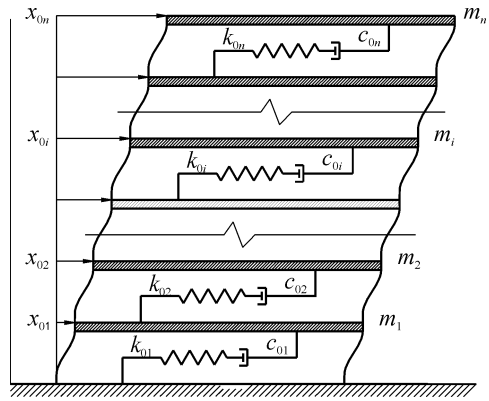


图 1　结构计算简图

Fig. 1　Structure calculation diagram

方程(1) 可化简为

$$\ddot{x}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \frac{\psi_{11}}{M_1^*}n_1P_1 + \frac{(\psi_{12}-\psi_{11})}{M_1^*}n_2P_2 + \cdots + \frac{(\psi_{1n}-\psi_{1(n-1)})}{M_1^*}n_nP_n = \frac{\boldsymbol{\psi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}}(t)}{M_1^*}, \tag{7}$$

式中：$M_1^* = \boldsymbol{\psi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}_1$；$C_1^* = \boldsymbol{\psi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\psi}_1$；$K_1^* = \boldsymbol{\psi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\psi}_1$；$\xi_1\omega_1 = \dfrac{C_1^*}{2M_1^*}$；$\omega_1^2 = \dfrac{K_1^*}{M_1^*}$。

将式(6) 代入式(4) 和式(5)，再将式(4) 和式(5) 代入式(7)；得

$$\ddot{x}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \frac{\psi_{11}}{M_1^*}\psi_{11}n_1P_1(x_1) + \frac{(\psi_{12}-\psi_{11})^2}{M_1^*}\times n_2P_2(x_1) + \cdots + \frac{(\psi_{1n}-\psi_{1(n-1)})^2}{M_1^*}n_nP_n(x_1)$$
$$= \frac{\boldsymbol{\psi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}}(t)}{M_1^*}, \tag{8}$$

式中：$P_i(x_1) = k_{0i}\int_0^t \mathrm{e}^{-\alpha_i(t-\tau)}\dot{x}_1(\tau)\mathrm{d}\tau, i = 1,2,\cdots,n$。

则结构运动方程可化简为

$$\ddot{x}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \boldsymbol{T}\boldsymbol{P}(x_1) = w(t), \tag{9}$$

式中：$\boldsymbol{T} = \left[\dfrac{\psi_{11}^2}{M_1^*}n_1 \quad \dfrac{(\psi_{12}-\psi_{11})^2}{M_1^*}n_2 \quad \cdots \quad \dfrac{(\psi_{1n}-\psi_{1n-1})^2}{M_1^*}n_n\right]$；$\boldsymbol{P}(x_1) = [P_1(x_1) \quad P_2(x_1) \quad \cdots \quad P_n(x_1)]^{\mathrm{T}}$；

$w(t) = \dfrac{\boldsymbol{\psi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{f}}(t)}{M_1^*}$；令 $\psi_{10} = 0$，则式(9) 可进一步化为

$$\ddot{x}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{(\psi_{1,i}-\psi_{1(i-1)})^2}{M_1^*}n_iP_i(x_1) = w(t)。 \tag{10}$$

2　传递矩阵法时域精确解

对式（10）进行拉普拉斯变换，可得

$$s^2\bar{x}_1(s) + 2s\xi_1\omega_1\bar{x}_1(s) + \omega_1^2\bar{x}_1(s) + s\sum_{i=1}^{n}\frac{(\psi_{1i}-\psi_{1(i-1)})^2}{M_1^*}n_i\frac{k_{0j}}{s+\alpha_j}\bar{x}_1(s) = \bar{w}(s)。 \tag{11}$$

结构的初始条件为

$$x(t=0) = x_0, \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0, \tag{12}$$

也即

$$\bar{x}(s) = \boldsymbol{D}(s)^{-1}\bar{\boldsymbol{G}}(s) = \boldsymbol{H}(s)\bar{\boldsymbol{G}}(s); \tag{13}$$

$$s\bar{x}(s) - x_0 = s\boldsymbol{H}(s)\bar{\boldsymbol{G}}(s) - x_0; \tag{14}$$

$$\boldsymbol{D}(s) = s^2 + 2s\xi_1\omega_1 + \omega_1^2 + s\sum_{i=1}^{n}\frac{(\psi_{1i}-\psi_{1(i-1)})^2}{M_1^*}n_i\frac{k_{0j}}{s+\alpha_j}; \tag{15}$$

$$\overline{\boldsymbol{G}}(s) = \overline{\boldsymbol{w}}(s)。 \tag{16}$$

式中:$\overline{x}(s)$、$\overline{w}(s)$ 分别为 $x(t)$、$w(t)$ 的拉普拉斯变换;$\overline{\boldsymbol{w}}(s)$ 为 $\overline{w}(s)$ 的一维向量;$\boldsymbol{D}(s)$ 和 $\boldsymbol{H}(s)$ 分别是结构的阻抗和传递矩阵。

结构的特征值方程为

$$\det \boldsymbol{D}(s) = 0, \tag{17}$$

由式(17) 可以求出 $n+2$ 个特征值 s_j,以及与之对应的右左特征向量 $\boldsymbol{u}_j$ 和 $\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}$,即

$$\det[\boldsymbol{D}(s_j)] = \det[s_j^2 + 2s_j\xi_1\omega_1 + \omega_1^2 + s_j\sum_{i=1}^{n}\frac{(\psi_{1i}-\psi_{1(i-1)})^2}{M_1^*}n_i\frac{k_{0j}}{s_j+\alpha_j}] = 0, \tag{18}$$

$$\boldsymbol{D}(s_j)\,\boldsymbol{u}_j = 0,\ \boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(s_j) = 0,\ j = 1,2,\cdots,n+2。 \tag{19}$$

由传递矩阵的相关理论[8] 可以得出:

$$\boldsymbol{H}(s) = \sum_{j=1}^{n+2}\frac{\eta_j\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}}{s-s_j}, \tag{20}$$

将式(19) 代入式(13) 和式(14),可得

$$\overline{x}_1(s) = \boldsymbol{H}(s)\,\overline{\boldsymbol{G}}(s) = \sum_{j=1}^{n+2}\frac{\eta_j\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}}{s-s_j}\overline{\boldsymbol{G}}(s), \tag{21}$$

$$s\overline{x}_1(s) = s_j\sum_{j=1}^{n+2}\frac{\eta_j\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}}{s-s_j}\overline{\boldsymbol{G}}(s)。 \tag{22}$$

其中:$\eta_j = \dfrac{1}{\gamma_j}$,$\gamma_j = \boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial\,\boldsymbol{D}(s_j)}{\partial s_j}u_j$,$\dfrac{\partial D(s_j)}{\partial s_j} = 2s_j + 2\xi_1\omega_1 + \sum_{i=1}^{n}\dfrac{(\psi_{1i}-\psi_{1(i-1)})^2}{M_1^*}n_i\dfrac{k_{0j}}{s_j+\alpha_j} -$

$s_j\sum_{i=1}^{n}\dfrac{(\psi_{1i}-\psi_{1(i-1)})^2}{M_1^*}n_i\dfrac{k_{0j}}{(s_j+\alpha_j)^2}$。

式中:n_j 为 n 层的阻尼器数量。

对式(21) 和(22) 进行拉普拉斯变换,在 0 初值的条件下:

$$x_1(t) = \sum_{j=1}^{n+2}\eta_j\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\int_0^t \mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}w(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{23}$$

$$\dot{x}_1(t) = s_j\sum_{j=1}^{n+2}\eta_j\boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\int_0^t \mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}w(\tau)\mathrm{d}\tau。 \tag{24}$$

因为结构的特征值有 $n+2$ 个(n 个负实数、一对共轭复数),所以对应的特征向量为 $\boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}} = 1$。故而,可以将结构的位移响应和速度响应解析式统一表示为

$$S_l(t) = \sum_{j=1}^{n+2}\beta_{lj}\int_0^t \mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}w(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{25}$$

其中:$S_1(t) = x_1(t)$,$S_2(t) = \dot{x}_1(t)$,$l = 1,2$;$\beta_{1j} = \eta_j$,$\beta_{2j} = s_j\eta_j$,$j = 1,2,\cdots,n+2$。

3 随机风振响应分析

3.1 基于 Davenport 谱的脉动风载激励模型

主体结构在高度为 H_i 的各楼层所受到的脉动风荷载 $P_{fi}(H_i,t)$ 为[9]

$$P_{fi}(H_i,t) = I_0(H_i)\sqrt{\frac{24k}{\mu_z(H_i)}}\overline{p}(H_i)f(t) = I_0(H_i)B_0(H_i)f(t), \tag{26}$$

式中:$I_0(H_i)$ 为方差为 1 的随机变量;k 为与地面粗糙度有关的系数;$\overline{p}(H_i)$ 为平均风荷载;$\mu_z(H_i)$ 为风

压高度变化系数；$f(t)$ 仅为时间 t 的随机过程，其均值为零，具有规格化 Davenport 功率谱 $S_f(\omega)$（即 $\int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega)\mathrm{d}\omega = 1$）。考虑竖向相关性，则脉动风载 $P_{fi}(H_i, t)$，$P_{fj}(H_j, t)$ 的相关函数：

$$E[P_{fi}(H_i,t)P_{fj}(H_j,t)] = \rho_{ij}\frac{24k\bar{p}(H_i)\bar{p}(H_j)}{\sqrt{\mu_z(H_i)\mu_z(H_j)}} \times E[f(t)f(t+\tau)], \tag{27}$$

式中：

$$\rho_{ij} = E[I_0(H_i)I_0(H_j)] = \exp\left(-\frac{1}{60}|H_i - H_j|\right)。 \tag{28}$$

由式(10)、(21)、(25) 和(26) 可得

$$S_l(t) = \sigma\sum_{j=1}^{n+2}\beta_{lj}\int_0^t \mathrm{e}^{s_j(t-\tau)}f(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{29}$$

式中：$\sigma = M_1^{-1}\psi_1 \mathrm{diag}\, \boldsymbol{I}_0(H_i)\ \boldsymbol{B}_0(H_i)$。

3.2　结构响应相关函数分析

对式（29）进行拉普拉斯变换，可得

$$\bar{S}_l(s) = \sigma\sum_{j=1}^{n+2}\frac{\beta_{lj}}{s - s_j}\bar{w}(s), \tag{30}$$

分别将 $n+2$ 个 s_j 和 β_{lj} 中的 1 对共轭复数和 n 个负实数作如下排列：令结构 n 个负实数特征根 s_j^r 及相应的 $\beta_{lj}^r(j = 1,2,\cdots,n)$ 分别表示为

$$s_j^r = -\beta_j,\ \beta_j > 0, \beta_{lj}^r = \mathrm{e}_{lj},\ 其中\ l = 1,2;\ j = 1,2,\cdots,n, \tag{31}$$

再将结构后 1 对共轭复特征根 s_j^c 及相应的 $\beta_{lj}^c(j = 1)$ 表示为：

$$s_{n+1}^c = \bar{s}_{n+2}^c = -\xi_1\omega_1 + i\omega_1\sqrt{1-\xi_1^2}, \tag{32}$$

$$\beta_{l(n+1)}^c = \bar{\beta}_{l(n+2)}^c = a_{l1} + ib_{l1}, \tag{33}$$

式中：上划线符号“-”表示取共轭复数，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$；

$$\begin{aligned}\bar{S}_l(s) &= \sigma\sum_{j=1}^{2}\frac{\beta_{lj}^c}{s - s_j^c}\bar{w}(s) + \sigma\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{e}_{lj}}{s+\beta_j}\bar{w}(s)\\ &= \sigma\frac{(\beta_{l1}^c + \bar{\beta}_{l1}^c)s - (\beta_{l1}^c\bar{s}_1^c + \bar{\beta}_{l1}^c s_1^c)}{s^2 - 2s(s_1^c + \bar{s}_1^c) + s_1^c\bar{s}_1^c}\bar{w}(s) + \sigma\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{e}_{lj}}{s+\beta_j}\bar{w}(s),\end{aligned} \tag{34}$$

$\beta_{l1}^c + \bar{\beta}_{l1}^c = 2a_{l1}$，$s_1^c\bar{s}_1^c = \omega_{l1}^2$，$-(s_1^c + \bar{s}_1^c) = 2\xi_{l1}\omega_{l1}$，$-(\beta_{n}^c\bar{s}_1^c + \bar{\beta}_{n}^c s_1^c) = 2(a_{l1}\xi_{l1}\omega_{l1} - b_{l1}\omega_{l1}\sqrt{1-\xi_{l1}^2}) = 2d_{l1}$，则

$$\bar{S}_l(s) = 2\sigma\frac{d_{l1} + a_{l1}s}{s^2 + 2s\xi_{l1}\omega_{l1} + \omega_{l1}^2}\bar{w}(s) + \sigma\sum_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{e}_{lj}}{s+\beta_j}\bar{w}(s)\ ; \tag{35}$$

$$S_l(s) = 2\sigma[d_{l1}y_1(t) + a_{l1}\dot{y}_1(t)] + \sigma\sum_{j=1}^{n}\mathrm{e}_{lj}\delta_j(t); \tag{36}$$

$$\dot{\delta}_{lj} + \beta_{lj}\delta_{lj} = f(t); \tag{37}$$

$$\ddot{y}_{l1} + 2\xi_{l1}\omega_{l1}\dot{y}_{l1} + \omega_{l1}^2 y_{l1} = f(t)。 \tag{38}$$

3.3　结构响应方差标准振子精确分解

对于平稳响应 $S_l(t)$ 的响应方差为

$$\begin{aligned}E[S_l(t_1)S_l(t_2)] &= \sum_{j=1}^{n+2}\sum_{r=1}^{n+2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\beta_{lj}\beta_{lr}E[\sigma^2]E[f(\tau_1)f(\tau_2)]\mathrm{e}^{s_r(t_2-\tau_2)+s_j(t_1-\tau_1)}\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\\ &= E[\sigma^2]\sum_{j=1}^{n+2}\sum_{r=1}^{n+2}\beta_{lj}\beta_{lr}\int_{-\infty}^{+\infty}f_w(t)\mathrm{d}w\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\mathrm{e}^{iw(\tau_1-\tau_2)+s_r(t_2-\tau_2)+s_j(t_1-\tau_1)}\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2\end{aligned}$$

$$= E[\sigma^2]\sum_{j=1}^{n+2}\sum_{r=1}^{n+2}\beta_{lj}\beta_{lr}\int_{-\infty}^{+\infty}f_w(t)\,e^{s_jt_2+s_rt_1}dw\int_0^{t_1}e^{\tau_1(iw-s_j)}d\tau_1\int_0^{t_2}e^{\tau_2(-iw-s_r)}d\tau_2$$

$$= E[\sigma^2]\sum_{j=1}^{n+2}\sum_{r=1}^{n+2}\beta_{lj}\beta_{lr}\int_{-\infty}^{\infty}f_w(t)\,\frac{(e^{i\omega t_1}-e^{s_jt_1})(e^{-i\omega t_2}-e^{s_rt_2})}{(i\omega-s_j)(-i\omega-s_r)}d\omega, \tag{39}$$

其中：$f_w(t)$ 为 $f(t)$ 的功率谱密度函数。对于平稳响应，可令 $t_1\to\infty$，$t_2\to\infty$，$t_1-t_2\to\tau$，则有

$$E[S_l^{\,2}(t)] = E[\sigma^2]\sum_{j=1}^{n+2}\sum_{r=1}^{n+2}\beta_{lj}\beta_{lr}\int_{-\infty}^{+\infty}f_w(t)\,\frac{1}{(i\omega-s_j)(-i\omega-s_r)}d\omega, \tag{40}$$

那么有

$$\sum_{j=1}^{n+2}\frac{\beta_{lj}}{i\omega-s_j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{e_{lj}}{i\omega+\beta_j}+\sum_{j=1}^{1}\left[\frac{\beta^c_{l(n+1)}}{i\omega-s^c_{n+1}}+\frac{\overline{\beta}^c_{l(n+1)}}{i\omega-\overline{s}^c_{n+1}}\right], \tag{41}$$

其中：

$$\frac{\beta^c_{l(n+1)}}{i\omega-s^c_{n+1}}+\frac{\overline{\beta}^c_{l(n+1)}}{i\omega-\overline{s}^c_{n+1}} = \frac{\beta^c_{l(n+1)}(i\omega-\overline{s}^c_{n+1})+\overline{\beta}^c_{l(n+1)}(i\omega-s^c_{n+1})}{(i\omega-s^c_{n+1})(i\omega-\overline{s}^c_{n+1})} = \frac{\beta^c_{l(n+1)}(i\omega-\overline{s}^c_{n+1})+\overline{\beta}^c_{l(n+1)}(i\omega-s^c_{n+1})}{-\omega^2+2i\xi_1\omega_1\omega+\omega_1^2}$$

$$= [\beta^c_{l(n+1)}(i\omega-\overline{s}^c_{n+1})+\overline{\beta}^c_{l(n+1)}(i\omega-s^c_{n+1})]H_2(\omega) = 2\{i\omega a_{l1}+[a_{l1}\xi_1\omega_1-b_{l1}\omega_1\sqrt{1-\xi_1^2}]\}H_2(\omega), \tag{42}$$

故

$$\sum_{j=1}^{n+2}\frac{\beta_{lj}}{i\omega-s_j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{e_{lj}}{i\omega+\beta_j}+2(z_{l1}+i\omega a_{l1})H_2(\omega)。 \tag{43}$$

其中：$z_{l1} = a_{l1}\xi_1\omega_1-b_{l1}\omega_1\sqrt{1-\xi_1^2}$，$H_2(\omega)$ 为标准二阶系统的频率响应特性函数。

二阶系统运动方程标准形式为

$$\delta_2(t)+2\xi_1\omega_1\dot{\delta}_2(t)+\omega_1^2\delta_2(t) = f(t), \tag{44}$$

且有 $H_2(\omega) = [\omega_1^2-\omega^2+2i\xi_1\omega_1\omega]^{-1}$。

同理可得

$$\sum_{r=1}^{n+2}\frac{\beta_{lr}}{-i\omega-s_r} = \sum_{r=1}^{n}\frac{e_{lr}}{-i\omega+\beta_r}-\left[\frac{\beta^c_{l(n+1)}}{i\omega+s^c_{n+1}}+\frac{\overline{\beta}^c_{l(n+1)}}{i\omega+\overline{s}^c_{n+1}}\right]。 \tag{45}$$

其中：

$$\left[\frac{\beta^c_{l(n+1)}}{i\omega+s^c_{n+1}}+\frac{\overline{\beta}^c_{l(n+1)}}{i\omega+\overline{s}^c_{n+1}}\right] = \frac{\beta^c_{l(n+1)}(i\omega+\overline{s}^c_{n+1})+\overline{\beta}^c_{l(n+1)}(i\omega+s^c_{n+1})}{(i\omega+s^c_{n+1})(i\omega+\overline{s}^c_{n+1})}$$

$$= [\beta^c_{l(n+1)}(i\omega+\overline{s}^c_{n+1})+\overline{\beta}^c_{l(n+1)}(i\omega+s^c_{n+1})]\overline{H}_2(\omega)$$

$$= 2\{i\omega a_{l1}-[a_{l1}\xi_1\omega_1-b_{l1}\omega_1\sqrt{1-\xi_1^2}]\}\overline{H}_2(\omega)。 \tag{46}$$

同理可得

$$\sum_{r=1}^{n+2}\frac{\beta_{lr}}{-i\omega-s_r} = \sum_{r=1}^{n}\frac{e_{lr}}{-i\omega+\beta_r}+2(z_{l1}-i\omega a_{l1})\overline{H}_2(\omega), \tag{47}$$

其中：$z_{l1} = a_{l1}\xi_1\omega_1-b_{l1}\omega_1\sqrt{1-\xi_1^2}$，$\overline{H}_2(\omega) = [\omega_1^2-\omega^2-2i\xi_1\omega_1\omega]^{-1}$。

因此，可得

$$\sum_{j=1}^{n+2}\sum_{r=1}^{n+2}\frac{\beta_{lj}\beta_{lr}}{(i\omega-s_j)(-i\omega-s_r)} = \left[\sum_{j=1}^{n}\frac{e_{lj}}{i\omega+\beta_j}+2(z_{l1}+i\omega a_{l1})H_2(\omega)\right]\cdot\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{e_{lr}}{-i\omega+\beta_r}+2(z_{l1}-i\omega a_{l1})\overline{H}_2(\omega)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{e_{lj}e_{lr}}{(i\omega+\beta_j)(-i\omega+\beta_r)}+2\sum_{j=1}^{n}\frac{e_{lj}}{i\omega+\beta_j}(z_{l1}-i\omega a_{l1})\overline{H}_2(\omega)+2\sum_{r=1}^{n}\frac{e_{lr}}{-i\omega+\beta_r}(z_{l1}+i\omega a_{l1})H_2(\omega)+$$

$$4(z_{l1}^2+\omega^2a_{l1}^2)\,|H_2(\omega)|^2 = T_{l1}+T_{l2}+T_{l3}, \tag{48}$$

式中：

$$T_{l1} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{e_{lj}e_{lr}}{(i\omega+\beta_j)(-i\omega+\beta_r)}; \tag{49}$$

$$T_{l2} = 2\sum_{j=1}^{n}\frac{e_{lj}}{i\omega+\beta_j}(z_{l1}-i\omega a_{l1})\overline{H}_2(\omega) + 2\sum_{r=1}^{n}\frac{e_{lr}}{-i\omega+\beta_r}(z_{l1}+i\omega a_{l1})H_2(\omega); \tag{50}$$

$$T_{l3} = 4(z_{l1}^2+\omega^2 a_{l1}^2)\,|H_2(\omega)|^2。 \tag{51}$$

将 T_{l1} 和 T_{l2} 按标准二阶和标准一阶系统的频率响应特性函数的模平方 $|H_2(\omega)|^2$、$|H_{1j}(\omega)|^2$ 进行恒等分解，得：

$$T_{l1} = \sum_{j=1}^{n}e_{lj}^2\,|H_{1j}(\omega)|^2 + \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{r=j+1}^{n}\frac{2e_{lj}e_{lr}}{\beta_j+\beta_r}(\beta_j\,|H_{1j}(\omega)|^2+\beta_r\,|H_{1r}(\omega)|^2);$$

$$T_{l2} = 4\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}e_{lr}[Q_{l1r}\,|H_{1r}(\omega)|^2 + V_{l1r}\,|H_2(\omega)|^2 + W_{l1r}\omega^2\,|H_2(\omega)|^2]。$$

式中：Q_{l1r}、V_{l1r}、W_{l1r} 为代表参数多项式的常量；$H_{1j}(\omega)$ 为标准一阶系统的频率响应特性函数，一阶系统运动方程标准形式为

$$\dot{\delta}_{lj}(t)+\beta_j\delta_{lj}(t) = f(t), \tag{52}$$

且有 $|H_{1j}(\omega)|^2 = \dfrac{1}{\omega^2+\beta_j^2}$。

由式(49) ~ 式(51)，得结构平稳响应方差 $E[S_l^2(t)]$ 按系列标准振子响应方差分解的解析表达式为

$$E[S_l^2(t)] = E[\sigma^2](D_{l1}+D_{l2}+D_{l3}+D_{l4}), \tag{53}$$

其中：

$$D_{l1} = \sum_{j=1}^{n}e_{lj}^2 I_{1j}; \tag{54}$$

$$D_{l2} = 2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{r=j+1}^{n}\frac{e_{lj}e_{lr}}{\beta_j+\beta_r}(\beta_j I_{1j}+\beta_r I_{1r}) + 4\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}e_{lr}Q_{l1r}I_{1r}; \tag{55}$$

$$D_{l3} = 4\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}e_{lr}[V_{l1r}I_{21j}+W_{l1r}I_{22j}]; \tag{56}$$

$$D_{l4} = 4(z_{l1}^2 I_{21j}+a_{l1}^2 I_{22j})。 \tag{57}$$

式中：$I_{1j}(\beta_j)$ 为一阶系列标准振子的位移响应方差；$I_{21j}(\omega_j,\xi_j)$ 和 $I_{22j}(\omega_j,\xi_j)$ 分别为二阶系列标准振子的位移与速度响应方差；它们的表达式分别为

$$I_{1j}(\beta_j) = \int_{-\infty}^{+\infty}|H_{1j}(\omega)|^2 f_w(t)\,\mathrm{d}\omega; \tag{58}$$

$$I_{21}(\omega_1,\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}|H_2(\omega)|^2 f_w(t)\,\mathrm{d}\omega; \tag{59}$$

$$I_{22}(\omega_1,\xi_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2\,|H_2(\omega)|^2 f_w(t)\,\mathrm{d}\omega。 \tag{60}$$

李桂青[10] 已经求得了 $I_{1j}(\omega_j,\xi_j)$，$I_{2j}(\omega_j,\xi_j)$ 的解析表达式，$E[\sigma^2]$ 中的参数可由规范查得，故由式(53) 可得到结构风振响应的解析解。

4　结构设计响应分析

由于结构设计响应值 $R(x_1)$ 是响应 x_1 的最大值，故它可取为峰值因子 c_f 与响应 x_1 的标准差 $\sigma_{x_1} = \sqrt{E[x_1^2]}$ 的乘积，即

$$\boldsymbol{R}(x_1) = \boldsymbol{\psi}_1 c_f\sqrt{E[x_1^2]}, \tag{61}$$

上部结构由振型 ψ_1 展开

$$\boldsymbol{x} = \psi_1 x_1 , \tag{62}$$

对主体结构,ω_1 为结构的一阶自振频率,其刚度与第一振型关系为

$$K\boldsymbol{\psi}_1 = \omega_1^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}_1 , \tag{63}$$

故有

$$KR(x_1) = \omega_1^2 \boldsymbol{M}\boldsymbol{\psi}_1 c_f \sqrt{E[x_1^2]} 。 \tag{64}$$

上部结构第 i 层所受等效风振力 $P_{\mathrm{d}i}$ 为

$$P_{\mathrm{d}i} = k_i R(x_{1i}) = \omega_1^2 m_i \psi_{1i} c_f \sqrt{E[x_1^2]} , \tag{65}$$

式中:m_{0i} 为上部结构在第 i 层处的质量;φ_{1i} 为第一振型 ψ_1 在第 i 层处的分量。考虑到结构顺风向的风载可以看成是平均风力和等效风振力共同作用的总效应,于是可得到结构第 i 层顺风向的等效静态设计风荷载取值为

$$P_i = \overline{P}(H_i) + P_{\mathrm{d}i} = \overline{P}(H_i) + \omega_1^2 m_i \psi_{1i} c_f \sqrt{E[x_1^2]} 。 \tag{66}$$

5 算 例

某海边一 20 层钢结构建筑，层高均为 3.5 m，每层质量 110 t，迎风面积 105 m^2，当地基本风压为 700 $\mathrm{N/m}^2$，Davenport 风谱中的地面粗糙系数取 $k = 0.001\ 29$[11]。结构第一振型阻尼比 $\xi_{01} = 0.02$，结构的自振周期为 $T_1 = 1.597$ s。分 3 种工况添加 Maxwell 阻尼器：工况 1，每层加 30 个修正刚度 $k_{0i} = 4.5 \times 10^6$ N/m、阻尼 $c_{0i} = 4.5 \times 10^5$ N·s/m、松弛时间 $\lambda_1 = 0.1$ s 的相同的阻尼器；工况 2，每层加 30 个修正刚度 $k_{0i} = 4.5 \times 10^6$ N/m、阻尼 $c_{0i} = 2.25 \times 10^5$ N·s/m、松弛时间 $\lambda_2 = 0.05$ s 的相同的阻尼器；工况 3，每层加 30 个修正刚度 $k_{0i} = 4.5 \times 10^6$ N/m、阻尼 $c_{0i} = 0.9 \times 10^5$ N·s/m、松弛时间 $\lambda_3 = 0.02$ s 的相同的阻尼器。

图 2 给出了上述工况 1($\lambda_1 = 0.1$ s)下和不加阻尼器的普通结构的风振位移响应值。图 3 给出了 3 种工况，即添加不同参数阻尼器后结构产生的风振位移响应值。表 1 列出了有无 Maxwell 阻尼器结构的等效静态设计风荷载取值。可以看出，高层结构在添加了阻尼器以后，各楼层的位移响应有大幅减小，且在结构都添加阻尼器时，所添加的阻尼器的松弛时间越长(阻尼越大)，结构的位移减小越明显。此外，工况 1 与普通结构相比，结构的等效风荷载减少了 3.87% ~ 15.77%。可见，带 Maxwell 阻尼器的结构对于减少等效风荷载作用效果是明显的。

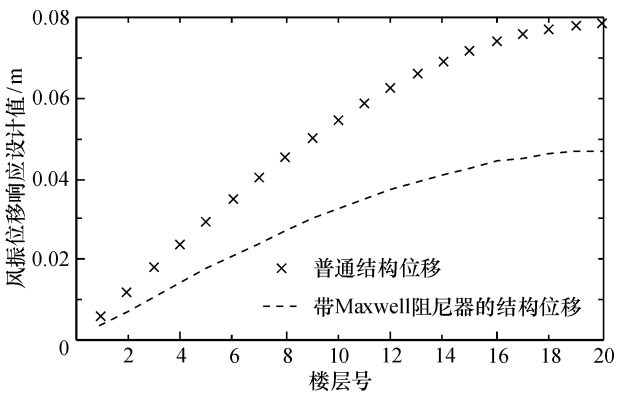


图 2 工况 1 和普通结构各楼层风振位移响应设计值

Fig. 2 First case and response design of wind vibration displacement response in ordinary structure

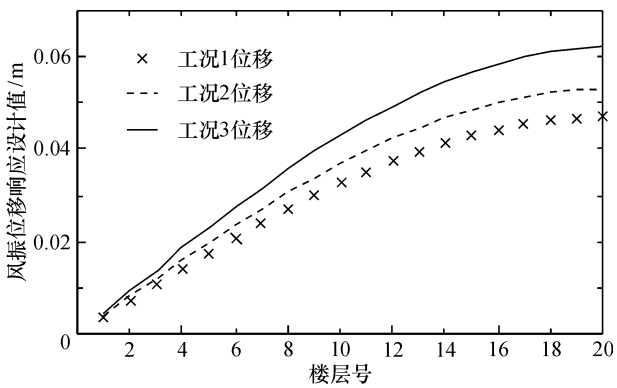


图 3 3 种加阻尼器工况下结构各楼层风振位移响应设计值

Fig. 3 Response design of wind vibration displacement response in the structure under three kinds of dampers

表 1　各楼层等效静态设计风荷载取值

Table 1　Equivalent static design wind load value of each floor　　kN

楼层	等效风振力			平均风力	等效静态设计风荷载取值		
	普通结构	带阻尼器结构	减少比例/%	所有结构	普通结构	带阻尼器结构	减少比例/%
1	9.55	5.69	40.38	95.36	104.91	101.06	3.68
2	19.04	11.35	40.37	112.62	131.66	123.98	5.84
3	28.42	16.95	40.37	124.13	152.55	141.08	7.52
4	37.64	22.44	40.38	133.00	170.65	155.45	8.91
5	46.63	27.81	40.37	140.32	186.95	168.13	10.07
6	55.35	33.00	40.37	146.60	201.95	179.60	11.07
7	63.74	38.01	40.37	152.12	215.86	190.13	11.92
8	71.76	42.79	40.37	157.08	228.84	199.87	12.66
9	79.36	47.32	40.37	161.58	240.94	208.91	13.30
10	86.50	51.58	40.37	165.72	252.22	217.30	13.85
11	93.12	55.53	40.37	169.55	262.67	225.08	14.31
12	99.20	59.15	40.37	173.13	272.33	232.29	14.70
13	104.70	62.43	40.37	176.49	281.19	238.92	15.03
14	109.58	65.34	40.37	179.66	289.24	245.00	15.29
15	113.82	67.87	40.37	182.66	296.48	250.53	15.50
16	117.40	70.00	40.37	185.51	302.91	255.51	15.65
17	120.28	71.72	40.37	188.23	308.51	259.95	15.74
18	122.46	73.02	40.37	190.83	313.29	263.85	15.78
19	123.91	73.89	40.37	193.32	317.23	267.21	15.77
20	124.65	74.33	40.37	195.71	320.36	270.04	15.71

6　结　论

本文对多自由度 Maxwell 结构的高层建筑随机风振响应等效静态风荷载取值进行了研究，获得了结构基于规范 Davenport 谱对应的以第一振型表示的结构随机响应和等效风荷载的解析解，并验证了本文所用方法的准确性。现行规范没有对多自由度带 Maxwell 结构风振响应进行分析的推荐方法[12]。通过本文的分析和算例可以看出，多自由度带 Maxwell 的风振响应与不带 Maxwell 的结构风振响应有较大区别，因此本文的方法可为相关结构的设计和优化提供参考。

参考文献：

[1] 黄文俊，李录平，祁立君，等. 几种常见阻尼器的减振特性分析 [J]. 振动与冲击，2007，26（7）：40－42，68.

[2] 瞿伟廉，程懋堃，毛增达，等. 设置粘弹性阻尼器钢结构高层建筑抗震抗风设计的实用方法 [J]. 建筑结构学报，1998，19（3）：42－49.

[3] 李创第，葛新广，朱倍权. 带五种被动减振器的高层建筑基于 Davenport 谱随机风振响应的解析解法 [J]. 工程力学，2009，26（4）：144－152.

[4] 李创第，葛新广，李暾，等. 多自由度 Maxwell 阻尼器减震结构（Ⅰ）——随机响应特性 [J]. 应用力学学报，2012，29（4）：368－373.

[5] 瞿伟廉，陶牟华，Chang C C. 五种被动动力减振器对高层建筑脉动风振反应控制的实用设计方法 [J]. 建筑结构学报，2001，22（2）：29－34.

[6] Tan D Y. Discrete analysis method for structural correlation response [J]. Computers & Structures，1996，58（1）：143－153.

[7] 李创第，夏立志，葛新广，等. Maxwell 粘滞阻尼器耗能结构的随机地震响应 [J]. 桂林理工大学学报，2011，31（1）：61－67.

[8] 廖伯瑜，周新民，尹志宏. 现代机械动力学及其工程应用：建模、分析、仿真、修改、控制、优化 [M]. 北京：机械工业

出版社，2004：22 – 188.
[9] 杨庆山，沈世钊. 悬索结构随机风振反应分析 [J]. 建筑结构学报，1998，19（4）：29 – 39.
[10] 李桂青，曹宏，李秋胜，等. 结构动力可靠性理论及其应用 [M]. 北京：地震出版社，1993：9 – 203.
[11] 王修琼，崔剑峰. Davenport 谱中系数 K 的计算公式及其工程应用 [J]. 同济大学学报（自然科学版），2002，30（7）：849 – 852.
[12] GB50009—2012，建筑结构荷载规范 [S].

Analysis of wind induced vibration response based on transfer matrix method for multi-degree freedom Maxwell structure

ZOU Wan-jie，GUO Zhao-jun，LI Chuang-di
（College of Civil Engineering，Guangxi University of Science and Technology，Liuzhou 545006，China）

Abstract：The structure of multi-degree freedom Maxwell damper is studied. First，the multi-degree freedom structure is expanded by first mode. Single degree freedom motion equation is obtained. As the equation does not have the classical damping，the analytical expression of the generalized displacement and the generalized velocity is obtained by the transfer matrix method. Then，by random vibration theory，the response variance of the displacement and velocity structure is divided into a series of standard vibrator displacement and velocity response of a linear combination of the variance. Finally，the structural random response and equivalent wind load are obtained by the Davenport spectrum. A random wind vibration response analysis method is established with Maxwell structure. A numerical example is given.

Key words：multi-degree freedom Maxwell；analytical solution；wind load value；random wind vibration response