文章编号：1674 - 9057（2011）01 - 0153 - 03

NA 列的中心极限定理

伍艳春[1]，孙梦雅[2]，王大王[1]，

（1. 桂林理工大学 理学院，广西 桂林 541004；2. 广西民族大学 国际教育学院，南宁 530006）

摘 要：讨论了有界 NA 列的渐近正态问题，利用截尾以及构造函数的方法，在 Lebesgue 条件下，得到了 NA 序列的中心极限定理并给出了证明。

关键词：NA 序列；渐进正态性；中心极限定理

中图分类号：O211.4 **文献标志码**：A

1 引言和引理

1983 年 Joag-Dev 和 Proschan 引入了 NA（negatively associated）的概念，由于 NA 在可靠性理论、渗透理论和多元统计分析中应用广泛，引起了人们的高度兴趣，本文给出 Lebesgue 条件下 NA 序列的中心极限定理。

定义 1[1] 称 r. v. 列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, n \geqslant 2$ 是 NA 的，若对 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任意两个非空子集 A_1，A_2，均有 $\operatorname{cov}(f_1(X_i, i \in A_1), f_2(X_j, j \in A_2)) \leqslant 0$，其中 $f_i, i = 1, 2$，是关于各变元单调的函数。称 r. v. 列 $[X_n, n \geqslant 1]$ 是 NA 列，如果对任意 $n \geqslant 2, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 NA 的。

定义 2 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上的实函数，$\forall 0 < \alpha \leqslant 1$，有 $\|f\|_\alpha = \sup\{|f(x) - f(y)| / |x - y|^\alpha; x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$，$\varphi_\alpha = \{f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, 且\ \|f\|_\alpha < \infty\}$。

引理 1[2] 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 NA 变量，有 $EX_j^2 < \infty$，则 $\forall \lambda_j \in \mathbf{R}, j = 1, \cdots, n$，有

$$\left|\mathrm{E}\exp\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j\right) - \prod_{j=1}^{n} \mathrm{E}\exp(\lambda_j X_j)\right| \leqslant -2 \sum_{1 \leqslant l \leqslant j \leqslant n} |\lambda_i \lambda_j| \operatorname{cov}(X_l, X_j)。$$

引理 2[3] 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为相互独立的随机变量，有 $EX_j = 0$，并对于某 $0 < \alpha \leqslant 1$，有 $E|X_j|^{2+\alpha} < \infty, j = 1, \cdots, n$，又设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 且二次可微，满足 $\|f''\|_\alpha < \infty$，则

$$\left|\mathrm{E} f(S_n / s_n) - \int f \mathrm{d}\Phi\right| \leqslant c \|f''\|_\alpha s_n^{-2-\alpha} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}|X_j|^{2+\alpha}。$$

其中：$s_n = (\mathrm{E}S_n^2)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}(X_j^2)\right)^{1/2}$，$\Phi$ 为标准正态分布函数。

引理 3[4] 设 $\{X_n; n \geqslant 1\}$ 的 p 阶矩存在，当 $0 < p \leqslant 1$ 时是任意随机序列，当 $p \geqslant 1$ 时是 NA 零均值序列，则 $\forall 0 < p \leqslant 2$，有 $\mathrm{E}(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |S_j|^p) \leqslant c \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}|X_i|^p$。

引理 4[5] r. v. 列 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是 NA 的。$\forall m \geqslant 2$，$A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的两两不交的非空子集，如果 $f_i, i = 1, 2, \cdots, m$，对每个变元单调。

（1）$f_1(X_j, j \in A_1), \cdots, f_m(X_j, j \in A_m)$ 仍是 NA 的。

（2）如果 $f_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, m$，则 $\mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{m} f_i(X_j, j \in A_j)\right) \leqslant \prod_{i=1}^{m} \mathrm{E} f_i(X_j, j \in A_j)$。

注：本文中出现的常数 c 在不同的地方可能取不同的常数。

2 主要结果及证明

定理 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是 NA 列，$X_n \xrightarrow{p} X$，$|X_n| \leqslant |Y|$ a. s. $(n \geqslant 1)$，$\mathrm{E}|Y| < \infty$，满足 $\mathrm{E}X =$

收稿日期：2010 - 05 - 31
基金项目：广西自然科学基金项目（2010GXNSFA013121）；桂林市科技项目（市科［2009］32）
作者简介：伍艳春（1964—），女，副教授，研究方向：数理统计，wyc@glite.edu.cn。
引文格式：伍艳春，孙梦雅，王大王．NA 列的中心极限定理［J］．桂林理工大学学报，2011，31（1）：153 - 155.

$0, 0 < \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \mathrm{E}X_j^2 < \infty$ 及

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(S_n{}^2/n) = \sigma^2 > 0, \tag{1}$$

存在严格单调上升的自然数列$\{n_k\}$，$0 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$，对某一个 $0 < \alpha \leqslant 1$ 满足 $m_k = n_k - n_{k-1}$，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{m_k}{n_k}\right)^{1+\alpha/2} < \infty, \tag{2}$$

$\forall j \in \mathbf{N}$，r. v. $S_{n_{j-1},m_j} = \sum\limits_{k=n_{j-1}+1}^{n_j} X_k$，设 S_{n_{j-1},m_j} 相互独立，必有 $S_n/\sqrt{\mathrm{E}S_n^2} \xrightarrow{d} N(0,1)$。

证明 由式(1)可知，当 n 足够大时，有 $\mathrm{E}S_n^2 \geqslant cn$。

在式(2)条件下，由级数的收敛性可知，$m_k/n_k \to 0(k\to\infty)$，根据单调有界性原理：$\exists k$ 有 $m_k/n_k \leqslant 1$，结合引理3，

$$\forall \varepsilon > 0, P(\max_{1\leqslant j\leqslant m_k} | S_{n_{k-1},j} | > \varepsilon \sqrt{n_{k-1}})$$

$$\ll (1/n_{k-1})\mathrm{E}(\max_{1\leqslant j\leqslant m_k} | S_{n_{k-1},j} |)^2 \leqslant c\frac{1}{n_{k-1}}\sum_{j=1}^{m_k}\mathrm{E}| X_j |^2$$

$$\leqslant c\frac{m_k}{n_{k-1}}\max_{1\leqslant j\leqslant m_k}\mathrm{E}X_j^2 \to c\frac{m_k}{n_{k-1}} = c\left(1+\frac{m_k}{n_{k-1}}\right)\frac{m_k}{n_k}$$

$$\leqslant cm_k/n_k \to 0,\ k\to\infty。$$

令 $X_j' = -\sqrt{j}I_{(X_i<-\sqrt{j})} + X_jI_{(|X_j|\leqslant\sqrt{j})} + \sqrt{j}I_{(X_j>\sqrt{j})}$，$Y_j = X_j' - \mathrm{E}X_j'$，$Z_j = X_j - Y_j$，

则 X_j'，Y_j，Z_j 都是 X_j 的非降函数，由引理4知$\{X_j'\}$，$\{Y_j\}$，$\{Z_j\}$ 仍为NA列，且有 $\mathrm{E}Y_j = 0$，$\mathrm{E}Z_j = 0$。结合条件 $0 < \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\mathrm{E}X_j^2 < \infty$，有

$$\frac{1}{n}\mathrm{E}(\sum_{j=1}^n Z_j)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathrm{E}Z_j^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathrm{E}(X_j - X_j')^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathrm{E}[(X_j - X_j')^2(I_{(|X_j|\leqslant\sqrt{j})} + I_{(|X_j|>\sqrt{j})})]$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n [\mathrm{E}X_j^2 I_{(|X_j|>\sqrt{j})} + jP(| X_j | > \sqrt{j})]$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n [\max_{1\leqslant j\leqslant n}\mathrm{E}X_j^2 I_{(|X_j|>\sqrt{j})} + jP(| X_j | > \sqrt{j})]$$

$$\leqslant \frac{2}{n}\sum_{j=1}^n \max_{1\leqslant j\leqslant n}\mathrm{E}X_j^2 I_{(|X_j|>\sqrt{j})} \to 0,$$

那么 $\forall \varepsilon > 0$，由 Markov 不等式知

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left|\sum_{j=1}^n Z_j\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2 n}\mathrm{E}(\sum_{j=1}^n Z_j)^2 \to 0。$$

所以

$$\frac{1}{n}\mathrm{E}(\sum_{j=1}^n Y_j)^2 = \frac{1}{n}\mathrm{E}\left(\sum_{j=1}^n (X_j - Z_j)\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\mathrm{E}S_n^2 + \frac{1}{n}\mathrm{E}(\sum_{j=1}^n Z_j)^2 - \frac{2}{n}\mathrm{E}[S_n(\sum_{j=1}^n Z_j)]$$

$$\ll \sigma^2 - \left(\frac{1}{n}\mathrm{E}S_n^2\right)^{1/2}\left[\frac{1}{n}\mathrm{E}(\sum_{j=1}^n Z_j)^2\right]^{1/2}$$

$$\ll \sigma^2 - (\max_{1\leqslant j\leqslant n}\mathrm{E}X_j^2)^{1/2}\left[\frac{1}{n}\mathrm{E}(\sum_{j=1}^n Z_j)^2\right]^{1/2} \to \sigma^2 > 0。$$

由上可知，为证明定理成立，只需证明

$$(\sum_{j=1}^{n_k} Y_j)/\sqrt{\mathrm{E}(\sum_{j=1}^{n_k} Y_j)^2} \xrightarrow{d} N(0,1),\ k\to\infty。\tag{3}$$

记 $U_k = \sum\limits_{j=1}^{m_k} Y_{n_{k-1}+j}$，$T_k = \sum\limits_{j=1}^{k} U_j = \sum\limits_{j=1}^{n_k} Y_j$，$G_k(u) = P(T_k/\sqrt{\mathrm{E}T_k{}^2} < u)$，$u \in \mathbf{R}$。

依据 Lebesgue 控制收敛定理，$\mathrm{E}U_k = 0$，$\mathrm{E}| U_k |^p < \infty$，$\forall p > 0$。由式(3)知，要证明定理的结论成立，只需要证明

$$\forall u \in \mathbf{R}，有 \lim_{k\to\infty} G_k(u) = \Phi(u)。\tag{4}$$

下面证明式(4)成立。

$\exists u \in \mathbf{R}$，$\forall \varepsilon \in (0,1]$，构造函数 $f_\varepsilon, g_\varepsilon: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，均三次可微，并且

①$f_\varepsilon(x)$，$g_\varepsilon(x) \in [0,1]$；

②$f_\varepsilon(x) = \begin{cases}1, & x \leqslant u;\\ 0, & x \geqslant u+\varepsilon;\end{cases}$

$g_\varepsilon(x) = \begin{cases}1, & x \leqslant u-\varepsilon;\\ 0, & x \geqslant u;\end{cases}$

③$\exists \alpha \in (0,1]$，使 $\| f_\varepsilon'' \|_\alpha \leqslant c\varepsilon^{-2-\alpha}$，$\| g_\varepsilon'' \|_\alpha \leqslant c\varepsilon^{-2-\alpha}$。

当 $\varepsilon = 1$ 时，上述满足条件的函数存在[3]。

当 $\varepsilon \in (0,1)$ 时，只要令 $f_\varepsilon(x) = f(u + (x-u)/\varepsilon)$，$g_\varepsilon(x) = g(u + (x-u)/\varepsilon)$。

显然 $\forall \varepsilon \in (0,1)$，有 $\mathrm{E}g_\varepsilon(T_k/\sqrt{\mathrm{E}T_k^2}) \leqslant G_k(u) \leqslant \mathrm{E}f_\varepsilon(T_k/\sqrt{\mathrm{E}T_k^2})$，

即 $\mathrm{E}g_\varepsilon(T_k/\sqrt{\mathrm{E}T_k^2}) - \Phi(u) \leqslant G_k(u) - \Phi(u) \leqslant \mathrm{E}f_\varepsilon(T_k/\sqrt{\mathrm{E}T_k^2}) - \Phi(u)$。

所以，

$$| G_k(u) - \Phi(u) | \leqslant \left|\mathrm{E}f_\varepsilon(T_k/\sqrt{\mathrm{E}T_k^2}) - \int f_\varepsilon \mathrm{d}\Phi\right| +$$

$$2\left|\mathrm{E}g_\varepsilon(T_k/\sqrt{\mathrm{E}T_k^2}) - \int g_\varepsilon \mathrm{d}\Phi\right| +$$

$$\left|\int f_\varepsilon \mathrm{d}\Phi - \Phi(u)\right| + 2\left|\int g_\varepsilon \mathrm{d}\Phi - \Phi(u)\right|$$

$$\triangleq I_1 + 2I_2 + \left|\int f_\varepsilon \mathrm{d}\Phi - \Phi(u)\right| + 2\left|\int g_\varepsilon \mathrm{d}\Phi - \Phi(u)\right|$$

$$\leqslant I_1 + 2I_2 + \int_u^{u+\varepsilon} |f_\varepsilon| \mathrm{d}\Phi + 2\int_{u-\varepsilon}^u |g_\varepsilon| \mathrm{d}\Phi$$

$$\leqslant I_1 + 2I_2 + 2\int_{u-\varepsilon}^{u+\varepsilon} \mathrm{d}\Phi(u)$$

$$\leqslant I_1 + 2I_2 + 4\varepsilon/\sqrt{2\pi} \to I_1 + 2I_2, \varepsilon \to 0。$$

下证 $I_1 \to 0$。

由引理 2 知：

$$I_1 \leqslant c \|f''\|_\alpha (\mathrm{E}T_k^2)^{-1-\alpha/2} \sum_{j=1}^k \mathrm{E}(U_j)^{2+\alpha}$$

$$= c \|f''\|_\alpha (\mathrm{E}T_k^2/n_k)^{-1-\alpha/2} n_k^{-1-\alpha/2} \sum_{j=1}^k \mathrm{E}(U_j)^{2+\alpha}$$

$$\to c \|f''\|_\alpha \sigma^{-1-\alpha} n_k^{-1-\alpha/2} \sum_{j=1}^k \mathrm{E}(U_j)^{2+\alpha}$$

$$\leqslant c n_k^{-1-\alpha/2} \sum_{j=1}^k \Big(\sum_{i=1}^{m_k} \mathrm{E}|Y_{n_{k-1}+i}|^{2+\alpha} + \big(\sum_{i=1}^{m_k} \mathrm{E}Y_{n_{k-1}+i}^2\big)^{1+\alpha/2} \Big)$$

$$\ll n_k^{-1-\alpha/2} \sum_{j=1}^k \Big(\sum_{i=1}^{m_k} \mathrm{E}|Y_{n_{k-1}+i}|^{2+\alpha} + (m_k \max_{1\leqslant i\leqslant m_k} \mathrm{E}X_i^2)^{1+\alpha/2} \Big)$$

$$\to n_k^{-1-\alpha/2} \sum_{j=1}^{n_k} \mathrm{E}|Y_j|^{2+\alpha} + n_k^{-1-\alpha/2} \sum_{j=1}^k m_j^{1+\alpha/2}$$

$$\to n_k^{-1-\alpha/2} \sum_{j=1}^{n_k} \mathrm{E}|Y_j|^{2+\alpha}。 \tag{5}$$

下证 $\sum_{j=1}^{n_k} j^{-1-\alpha/2} \mathrm{E}|Y_j|^{2+\alpha} < \infty$。

由 C_r 不等式，

$$\sum_{j=1}^{n_k} j^{-1-\alpha/2} \mathrm{E}|Y_j|^{2+\alpha}$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n_k} j^{-1-\alpha/2} C_{2+\alpha} (\mathrm{E}|X_j'|^{2+\alpha} + (\mathrm{E}|X_j'|)^{2+\alpha})$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^\infty j^{-1-\alpha/2} 2C_{2+\alpha} \mathrm{E}|X_j'|^{2+\alpha} \ll \sum_{j=1}^\infty c j^{-1-\alpha/2} \mathrm{E}|X_j'|^{2+\alpha}$$

$$= c\sum_{j=1}^\infty j^{-1-\alpha/2} \mathrm{E}|X_j'|^{2+\alpha} (I_{(|X_j|\leqslant\sqrt{j})} + I_{(|X_j|>\sqrt{j})})$$

$$= c\sum_{j=1}^\infty j^{-1-\alpha/2} \mathrm{E}|X_j|^{2+\alpha} I_{(|X_j|\leqslant\sqrt{j})} + c\sum_{j=1}^\infty j^{-1-\alpha/2} \cdot$$

$$\mathrm{E}|X_j|^{2+\alpha} I_{(|X_j|>\sqrt{j})}$$

$$\ll \sum_{j=1}^\infty j^{-1-\alpha/2} (\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathrm{E}|X_j|^{2+\alpha} I_{(|X_j|\leqslant\sqrt{j})})$$

$$= \sum_{j=1}^\infty j^{-1-\alpha/2} \sum_{i=1}^j (\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathrm{E}|X_j|^{2+\alpha} I_{(i-1<X_j^2\leqslant i)})$$

$$= \sum_{j=n}^\infty j^{-1-\alpha/2} \sum_{i=1}^\infty (\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathrm{E}|X_j|^{2+\alpha} I_{(i-1<X_j^2\leqslant i)})$$

$$\leqslant c\sum_{i=1}^\infty i^{-\alpha/2} (\max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathrm{E}|X_j|^{2+\alpha} I_{(\sqrt{i-1}<|X_j|\leqslant\sqrt{i})})$$

$$\leqslant c\sum_{i=1}^\infty \max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathrm{E}|X_j|^2 I_{(\sqrt{i-1}<|X_j|\leqslant\sqrt{i})}$$

$$= \max_{1\leqslant j\leqslant n} \mathrm{E}X_j^2 < \infty。$$

根据 Kronecker 引理，$n_k^{-1-\alpha/2} \sum_{j=1}^{n_k} \mathrm{E}|Y_j|^{2+\alpha} \to 0$，所以 $I_1 \to 0$。

同理 $I_2 \to 0$。

所以 $G_k(u) - \Phi(u) \to 0$，即 $S_n/\sqrt{\mathrm{E}S_n^2} \xrightarrow{d} \Phi(x)$，结论得证。

参考文献：

［1］ Joag-Dev K F. Negatively association of random varibles with applications［J］. Ann Statist, 1983, 11：286－295.

［2］ Newman C M. Asymptotic independence and limit theorems for positively dependent variables［J］. Inequalities in Statistics and Probability, IMS Lecture Notes-Monograph Series, 1984, 5：127－140.

［3］ Butzer P L, Hahn L. General theorems on rates of convergence in distribution of random variables 1. genral limit theoroms［J］. J. Multivariate Anal., 1978, 8：181－201.

［4］ 杨善朝. 随机变量部分和的矩不等式［J］. 中国科学：A 辑，2000（3）：218－223.

［5］ 吴群英. 混合序列的概率极限理论［M］. 北京：科学出版社，2006.

Central Limit Theorem of NA Sequence

WU Yan-chun[1], SUN Meng-ya[2], WANG Da-wang[1]

(1. *College of Science*, *Guilin University of Technology*, *Guilin* 541004, *China*; 2. *College of International Education*, *Guangxi University for Nationalities*, *Nanning* 530006, *China*)

Abstract: The asymptotic normality of the bounded Negatively Associated Sequences is discussed. The early papers on the asymptotic normality for NA sequence assumed that the sequence was identically distributed and strictly stationary. However, this is not always the case in most application. In this paper, the methods of cutting off tail and constructing function are used under the Lebesgue´s conditions, with central limit theorem for NA sequence and provement.

Key words: NA sequence; asymptotic normality; central limit theorem