文章编号：1006 - 544X（2010）01 - 0093 - 06

数学在地图学中的应用

钟业勋[1,2]，胡宝清[1]，乔俊军[3]

（1. 广西师范学院 a. 北部湾环境演变与资源利用教育部重点实验室；b. 资源与环境科学学院，南宁　530001；
2. 广西测绘局，南宁　530023；3. 武汉大学 测绘学院，武汉　430079）

摘　要：论述了拓扑学和函数论、几何学、代数学、微积分、图论、集合论、概率论与数理统计、分形几何、模糊数学等在地图学中的应用，并对应用了多种数学工具和数学方法的数理地图学作了简要介绍。数学在地图学中的广泛应用说明了数学在促进地图学的发展中发挥着重要作用。

关键词：数学；拓扑学；代数学；微积分；集合论；地图学；应用

中图分类号：P28　　**文献标志码：**A

数学是研究现实世界中的数量关系和空间形式的一门学科[1]。地图表示和反映的对象是地理空间中的自然现象和社会经济现象，也即为地球上大气圈、水圈、生物圈、岩石圈和土壤圈交互作用的区域内的事物[2]。空间地学实体间的数量关系和空间形式的客观存在，决定着数学与地图学之间存在着十分密切的关系。本文根据数学在地图学中的应用，分别对拓扑学和函数论、几何学、微积分等进行论述。

1　拓扑学和函数论

地图投影是地图的数学基础。地图投影也就是建立平面上的点（用平面直角坐标或极坐标表示）和地球表面上的点（用纬度φ、经度λ表示）之间的函数关系，即

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(\varphi,\lambda) \\ y &= f_2(\varphi,\lambda) \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

不同的f_1、f_2，决定着不同的具体的地图投影[3]。

地图投影变换，定义为 2 个二维场间的拓扑变换。若视地球表面为一剪开的具有曲线坐标φ、λ的二维场，那么，地图投影及其逆变换就是投影变换的一个特例[4]。所谓拓扑变换，是一种既不撕破也不捏合，但允许将图伸缩和弯曲的变换[5]。图 1 中的 2 幅南美洲地图，直观地表示了拓扑变换的含义。

根据拓扑学中网的数学定义，可以导出地图学中坐标网、水网、道路网等地图网络的数学定义[6]，因变量是自变量的函数[7]。式（1）中，x、y因给定的φ、λ值而变，x、y是φ、λ的函数。获得x的f_1和获得y的f_2是两个不同的函数。对应、映射、变换都是函数的同义词[8]。

地图符号是地图的语言。地图符号本质上是制图物体在三重拓扑映射下的平面象。这三重拓扑

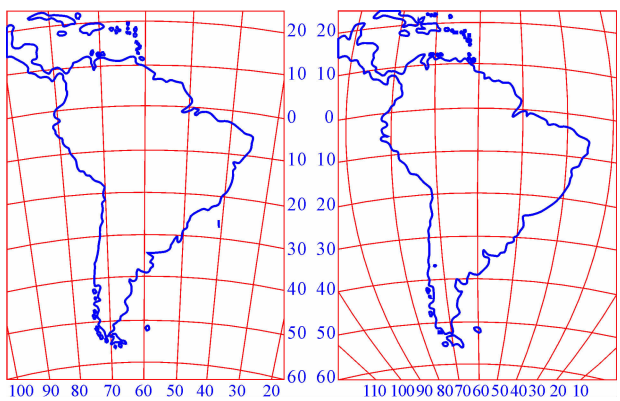


图 1　南美洲在 2 种不同投影中的形状

Fig. 1　South America in two different projections

收稿日期：2009 - 03 - 11

基金项目：国家自然科学基金资助项目（40871250，40661005）；教育部新世纪优秀人才支持计划专项（NCET - 06 - 0760）；广西自然科学基金重点项目（0832021Z）

作者简介：钟业勋（1939—），男，教授，研究方向：地图学理论，gxzyxun@163.com。

引文格式：钟业勋，胡宝清，乔俊军. 数学在地图学中的应用［J］. 桂林理工大学学报，2010，30（1）：93 - 98.

是:三维空间 X 到地球椭球面 S 的映射 f: $X \to S$,椭球面 S 到制图者认知结构 Y 的映射 g: $S \to Y$,以及 Y 到二维平面 Z 的映射 q: $Y \to Z$。设 x 为制图区域 A 内的制图物体,$x \in A \subset X$,则 $f(x) \in f(A) \subset S$ 为其椭球面上的投影,$gf(x) \in gf(A) \subset Y$ 为制图者关于 x 及 $f(x)$ 的知识,它以观念形态存在于制图者的认知结构 Y 中。$qgf(x) \in qgf(A) \subset Z$ 则为地图符号。制图者根据地图专题选定 x 的属性,通过主观干预保证 x 与 $qgf(x)$ 的一一对应性[9]。

2 几何学

以著名的第五公设(平行公理)演绎出来的几何体系,称为欧几里得几何。透视方位投影就是利用欧氏几何建立地图投影的传统方法。透视方位投影,根据视点与地球球心距离的大小,又可分为正射投影(视点在无穷远)、外心投影(视点位于球面外有限距离处)、球面投影(视点在地球面上)和球心投影(视点在地球中心)。我国学者李国藻创设的双重方位投影也属几何方法建立的投影[10]。

投影变形在地图投影中不可避免,笔者在文献[11]中对此用几何方法给出了形象的证明。

地图应用中常有面积量算。面积量算中的几何图形计算法、方格法、平行线法、经纬网格法等量算方法,都基于几何学的基本原理[12]。

3 微积分

微积分在地图学中的应用相当普遍。

建立地图投影的基本公式时,求一阶基本量(也称高斯系数)E、F、G、H 是推导公式的基础,这过程要对椭球面上的微分梯形沿经线、沿纬线、沿对角线微分,一阶基本量的表达式也是关于 φ 或关于 λ 的偏导数。等角条件、等积条件、等距离条件的确定,也包含一系列的微分和偏导数运算。

从赤道至纬度 φ 之间的子午线弧长 s 表现为积分

$$s = \int_0^{\varphi} \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}\mathrm{d}\varphi, \tag{2}$$

式中:a 为地球椭球的长半径,e 为第一偏心率。

椭球面上由经线 λ_1、λ_2,纬线 φ_1、φ_2 围成的球面梯形面积的积分式为

$$F = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} MN\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\lambda, \tag{3}$$

式中:M 为子午圈曲率半径,N 为卯酉圈曲率半径。

在等积投影计算中,需求经差 1 rad 的从赤道至纬度 φ 的球面梯形面积(以 km^2 为单位)。

高斯 - 克吕格投影的 x、y 坐标公式推导过程,需要进行一系列复杂的微分和导数、偏导数运算。杨启和通过对高斯 - 克吕格投影族的研究[13],推导出高斯 - 克吕格投影族长度比公式为

$$\mu = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial l}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{4}$$

高斯 - 克吕格投影族子午线收敛角公式为

$$\tan r = \frac{\partial x}{\partial l} \Big/ \frac{\partial y}{\partial l}。 \tag{5}$$

这两式都包含着 x、y 关于 l(经差)的偏导数。

4 代数学

代数学中把形如 $F_1(x,y,\cdots,z) = F_2(x,y,\cdots,z)$ 的等式称为方程。方程即含有未知数的等式。

以地球椭球长半径 a 和短半径 b,以地心为坐标原点的椭球面方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1。 \tag{6}$$

多圆锥投影、伪圆柱投影和圆柱投影,其经线都对称于中央经线,其经线方程表现为纬度 φ 或 φ 的函数 ψ 的高次幂方程[14]

$$\left.\begin{aligned} x_{ij} &= a_{i0}\varphi_j + a_{i1}\varphi_j^3 + a_{i2}\varphi_j^5 + \cdots + a_{im-1}\varphi_j^{2m-1} \\ y_{ij} &= b_{i0} + b_{i1}\varphi_j^2 + b_{i2}\varphi_j^4 + \cdots + b_{in-1}\varphi_j^{2(n-1)} \end{aligned}\right\}。 \tag{7}$$

若 $f(x)$、$g(x)$ 中至少有一个是初等超越函数,则方程 $f(x) = g(x)$ 称为初等超越方程(简称超越方程)。由赤道至纬度 φ 的子午线弧长公式,即本文的式(2),经变换后表现为(采用 IUGG75 椭球参数):

$$s = 111\ 133.004\ 6\varphi - 16\ 038.528\sin 2\varphi + 16.833\sin 4\varphi - 0.022\sin 6\varphi + 0.000\ 03\sin 8\varphi。 \tag{8}$$

经差1 rad,由赤道至纬度 φ 的椭球面梯形面积为

$$F = \frac{a^2(1-e^2)}{4e}\left[\frac{2e\sin\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi} + \ln\frac{1+e\sin\varphi}{1-e\sin\varphi}\right]。 \tag{9}$$

等角表象函数 U 公式为

$$U = \frac{\tan(45^\circ + \varphi/2)}{\tan^e(45^\circ + \psi/2)}, \tag{10}$$

式中:$\psi = \sin^{-1}(e\sin\varphi)$。上述式(8)、(9)、(10)都属代数学中的超越方程。笔者在文献[15]中给出了

这类超越方程的反解程序(已知 s、F 或 U 反解纬度 φ)。

地图表示对象中,不乏空间曲线,空间曲线的方程形式为[16]

$$\left.\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= 0 \\ F_2(x,y,z) &= 0 \end{aligned}\right\}。 \tag{11}$$

布尔代数又称逻辑代数，是阐释计算机计算原理的数学基础。对以点为基本元素的地图图像系统、以地图符号为基本元素的地图符号系统和地图图层为基本元素的地图图层系统，笔者证明了它们都属于布尔代数系[17-19]。笔者还论证了地图编绘过程实质上是通过有限的制图综合算子进行布尔运算的过程[20]。

5　图　论

文献［21］给出了图的经典定义。由于地图是图的集合中的子集，“地”字的限制，使它与其他图种如电路图、植物图等有本质的区别，使其具有地图的基本特性[22]。由于地图至少要有一个点作为内容，才能成其为图。而一个点按图的定义叫平凡图。考虑到内图廓线存在的必然性，所以任何情况下，地图都满足标准的图的定义，这是地图存在的逻辑基础。笔者在文献［23］中，在给出地图内容和形数学表述的基础上，给出了严密的地图数学定义。

地图符号可分为点状符号、线状符号和面状符号三大类。点线符号构成图 G,而面状符号则是图 G 的平面嵌入,即平面图 G 之平面嵌入,把平面分成若干个连通的封闭区域,每个区域叫做图 G 的一个面,那个无界面叫做图 G 的外面。从图论观点,又揭示了面状地图符号为点线地图符号构成的图 G 的平面嵌入这一特性[24]。图论也阐释了图形(由点线符号构成)与背景(由面状符号构成)在生成原理与视觉感受上的本质区别。

6　集合论

地图所表示的地学实体，如居民地、道路网、水系、地貌等，本质上是不同性质的点的集合。地图符号具有性质特征 i、表象特征(颜色)j、浓淡层次 t 三种基本特征。这些基本特征，是推出黑白地图、彩色地图等地图点集模型的基础[25]。

分类是认识事物、处理信息的一个基本步骤。地图符号分类体系中的每一种分类方法，都是按一定的标志将符号分成若干集合族，不同的标志，就构成不同的分类。例如，按符号定位部分的几何性质，可分为点状、线状和面状地图符号；按符号与地图比例尺的相关性，可分为依比例符号、不依比例符号和半依比例符号[26]；按地图符号是否反映现实存在可分为模拟和虚拟地图符号等[27-28]。集合论为地图内容分类提供了数学工具。

不同的地貌形态可视为一定区域内任意点 i 对确定的地貌特征点 P 的高差满足某一条件的点的集合。设地貌特征点 P 的邻域为 A,对于 $i \in A$,若 $H_P - H_i = D$,根据条件 D 的不同,可分别对斜坡、山、山脊、凹地、谷地、鞍部等给出定义[29]。山地和平原通过海拔高程和起伏度条件限制可以统一其定义[30]。应用集合论的邻域概念,通过地貌特征点所满足不同约束条件,可以建立地貌形态数学定义严密体系[31]。

集合 X 上的自反、反对称和传递关系称为偏序关系,用“$\leqslant$”表示,具有偏序关系的集合称为偏序集[32]。而定名量表、顺序量表、间隔量表和比率量表等地理变量量表,其本质上是满足某种条件的源数据偏序集$(X, \leqslant)$的简化,不同的简化偏序集$(A, \leqslant)$对$(X, \leqslant)$具有包含关系且具有不同的形式[33]。

7　概率论和数理统计

概率论是从数量的侧面来研究随机现象的统计规律的一门学科。地貌形态有时表现为概率论中的正态分布，但大多数表现为皮尔逊Ⅲ型分布。皮尔逊Ⅲ型曲线为英国学者皮尔逊创立，在地图制图中颇为常见。

数理统计研究的主要对象是相关关系。在地图制图中通常应用直线相关和曲线相关。研究一个随机变量与另一个非随机变量的相关称为回归分析；研究两个随机变量的相关性称为相关分析。回归分析和相关分析在地图制图中都有应用。例如，居民地是同道路网最密切的一个要素，居民地的选取对道路网有重要影响。文献［34］给出的一个实例中，通过测量 100 块样品，获得样品中每块居民地的个数 Q 和道路的网眼数 n，根据坐标纸上给出的 n 和 Q 的相关分布，用直线方程

拟合，通过回归计算得到回归方程

$$n = -0.6 + 0.9Q。 \quad (12)$$

当 $Q = 1$ 时有 $n = 0.3$，说明只有 1 个居民地时一般不构成网眼，均方差 $S_n = \pm 0.76$，离差系数 $C_v = 0.066$。作者按这公式选取道路，获得较好的效果。

在确定居民地分级选取数量指标、河流的选取标准等方面，概率论和数理统计都有应用。

8 分形几何学

欧几里得几何在规则、光滑形状（或有序系统）的研究中相当有效。然而，现实世界中却有许多问题不能用欧氏几何去解决。英国人 L·理查森考察海岸线的长度问题，发现在西班牙、葡萄牙、比利时、荷兰等国出版的百科全书记录的一些海岸长度竟相差 20%。法国数学家蒙德尔罗布（B. Mandelbrot）采用瑞典数学家柯克（H. Von. Koch）发现的“柯克曲线”作为思考海岸线问题的数学模型，通过深入研究并引进了分数维概念，1977 年正式将具有分数维的图形称为“分形”（fractal），并建立了以这类图形为对象的数学分支——分形几何[35]。分形是指由各个部分组成的形态，每个部分以某种方式与整体相似。分形几何揭示，象海岸线这样的非规则曲线，其总长与测量尺子的长度相关：尺子越小，测量结果越大。类似地，考虑到非规则的曲面面积测量，这时可以把尺子看成边长为 ε 的小方块。数出与曲线或曲面相交的方块数 $N(\varepsilon)$，则曲线的长度 $L(\varepsilon)$ 和曲面的“面积”$A(\varepsilon)$ 可求。这两种情况，线长 $L(\varepsilon)$ 或曲面面积 $A(\varepsilon)$ 满足：

$$\left.\begin{aligned} L(\varepsilon) &= N(\varepsilon)\varepsilon \\ A(\varepsilon) &= N(\varepsilon)\varepsilon^2 \end{aligned}\right\}。 \quad (13)$$

对于直线，$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-1}$，指数“-1”表示测量系统的维数为 1；对于平面，$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-2}$，指数“-2”表示系统的维数为 2。但对于图 2 所示的海岸线，它满足

$$N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-D}。 \quad (14)$$

D 可以是整数或分数，它是系统的分维。如果 D 和系统的拓扑维数一致，则大多数（并非全部）这样的系统是欧氏的或非分形的[36]。

何宗宜等[37]在研究水系具有分形现象的基础上，提出了水系要素分维数的确定方法，并利用水系的分数维规律进行地图综合，取得较好的结果。

现实空间和地图上有许多类似海岸线那样的不规则曲线，分形几何为这类曲线的度量提供了数学工具。

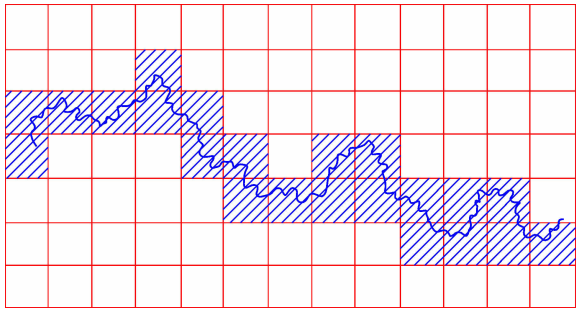


图 2 用分形几何量测不规则曲线长度示意图

Fig. 2 Sketch of non-rule curve length with fractal geometry

9 模糊数学

1965 年，美国 L. A. Zadel 教授提出“模糊集合”论文后，便产生了“模糊数学”。模糊集合和特征函数定义如下。

定义 X 是普通集合。映射 $\underset{\sim}{A}: X \to [0,1]$，称为模糊集合（fuzzy set），简称 F 集。$\underset{\sim}{A}(x)$ 称为 x 相对于 F 集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度。$\underset{\sim}{A}(\cdot)$ 称为 F 集合 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数[38]。

在经线表象为直线的常规地图投影中，采用模糊数学中的特征函数，可以表达其位置特征、性质特征、切割特征和外在特征[39]。地图符号的表象特征（颜色）、光源由标准白光到无光源的过渡变换，观察者的视觉特征由正常视力经色盲到失明的联系和演化等[40]，都可以用模糊数学中的特征函数来反映和描述（表 1）。

地图表示的对象，如自然地带、土壤、植被、民族分布等，都是逐渐过渡的，界线模糊，这类事物，很适于用模糊数学来描述。

在地图分析中，模糊数学也十分有用。例如，铁路枢纽重要性模糊综合评判、地图编绘质量的多层次模糊综合评判、区域农业气候分类的模糊聚类分析等[41]，都显示出其优越性。

10 数学多学科在地图学中的应用——数理地图学简介

数学在地图学中的广泛应用和交叉融合，孕育和催生了以数学语言和形式描述和阐释地图学

表 1　若干现象的特征函数及其对应状态

Table 1　Character function of some phenomenon and corresponding state

表示对象	特征函数式或符号	特征值及其对应状态		
		1	(1,0)	0
投影位置特征	$A(\alpha) = \cos\alpha$	$A(0°)$,正轴投影	$A(\alpha)$,斜轴投影	$A(90°)$,横轴投影
性质特征	$B(n) = (1+n)/2$	$B(1)$,等角投影	$B(n)$,任意投影	$B(-1)$,等积投影
切割特征	$C(\beta) = \cos(\beta \cdot 90°/K)$	$C(0°)$,相切型	$C(\beta)$,任意相割	$C(K)$,极值相割
外在特征	$D(\gamma) = \cos\gamma$	$D(0°)$,圆柱投影	$D(\gamma)$,圆锥投影	$D(90°)$,方位投影
表象特征(颜色)	j	黑色	彩色	白色
光源参数	a	标准白光	色光	无光源
观察者视力参数	b	感色能力正常	感色能力非正常	失明

中的相关概念和现象为重要特征的数理地图学。2007 年出版的《数理地图学》[42]，在注意传统的和现代地图学知识介绍的同时，特别增加了现行地图学教科书中尚未收录的新内容。本书尽量吸收最新的研究成果，数学思维贯穿全书。全书共分 12 章，其中的新内容包括：

（1）地理空间、制图区域和制图物体的数学定义；

（2）圆柱投影、圆锥投影和方位投影的统一数学模型；应用高斯 - 克吕格投影平面直角坐标公式反解地理坐标的方法；

（3）事物存在的时空特性与时态演化的数学模型；

（4）定名量表、顺序量表、间距量表和比率量表的数学本质和公式表达；

（5）从集合论原理推出山脊、谷地、鞍部等基本地貌形态的数学定义；

（6）地图色彩变异的数学模型与色彩表象特征值的计算公式及其对显色经验事实的验证；

（7）根据从三维空间 X 到地球椭球面 S，从 S 到主体认知结构 Y 以及从 Y 到二维平面 Z 存在三重拓扑映射原理，给出一般地图符号的数学定义。在此基础上，通过约束条件的不同，分别推导出模拟和虚拟地图符号，点、线、面地图符号，依比例、不依比例和半依比例符号的数学定义，使地图学界广泛认同但仍局限于定性描述的多种地图符号概念获得了精密的数学形式和定量描述；

（8）对形状、尺寸、方向等 8 个视觉变量给出了数学定义；

（9）通过对地图图像系统、地图符号系统和地图数据库系统的布尔代数结构的论证，揭示地图编绘过程的布尔代数运算的实质；

（10）地图内容质量特征和数量特征概括的数学模型，选取、舍弃等制图综合算子的数学定义；

（11）构建地图内容的数学原理和地图异构变换的数学模型；地图现势性和地图易读性度量方法；

（12）图像阴阳正反的数学定义；地图复制的数学原理和地图同构变换的数学模型等。《数理地图学》一书的出版是运用多种数学工具和方法，揭示地图学中某些问题的数学原理的尝试，介绍了数学在地图学中应用的例子。

11　结束语

数学在地图学中的应用广泛且有悠久的历史，应用的例子比比皆是。本文从拓扑学等 9 个数学分支列举了其在地图学中的应用，介绍了《数理地图学》中的数学内容。数学与地图学关系密切。一方面，处理制图资料，需要使用种种数学方法；解决制图问题，涉及各种数学模型；以数学形式表述地图学概念，会更加简洁明白；地图制图的基本原理，某些地图学现象的产生机制，可用数学揭示其本质特征和内在联系。在地图学理论研究和实践应用中引入数学思维，往往会带来新的突破。另一方面，地图学又为数学的应用提供了广阔的舞台，甚至于像解决曲折海岸线的量测问题而导致分形几何产生那样，催生新的学科。数学的肥沃土壤，孕育和催生了数理地图学。笔者这篇拙作，难以尽列数学在地图学的方方面面的应用及其丰硕成果，本意只在抛砖引玉，希望地图学界同仁们更多地运用数学工具和方法，关注、研究地图学问题，丰富和充实地图学理论。

参考文献：

[1]张燕顺. 数学的思想、方法和应用[M]. 北京：北京大学出版社，1997：1.

[2]陈述彭，鲁学军，周成虎. 地理信息系统导论[M]. 北京：科学出版社，2001：15.

[3]胡毓钜，龚剑文. 地图投影[M]. 2 版. 北京：测绘出版社，

1992:19.
[4]胡鹏,游涟,杨传勇,等. 地图代数[M]. 武汉:武汉大学出版社,2002:25.
[5]谷超豪. 数学词典[M]. 上海:上海辞书出版社,1992:234.
[6]钟业勋,童新华. 地图网络数学定义的研究[J]. 海洋测绘,2009,29(3):19 -20.
[7]西安交通大学高等数学教研室. 高等数学(上册)[M]. 北京:人民教育出版社,1964:103.
[8]李孝传,陈玉清. 一般拓扑学导引[M]. 北京:高等教育出版社,1982:13.
[9]钟业勋,朱重光,魏文展. 地图空间认知的数学原理[J]. 测绘科学,2005,30(5):11 -12.
[10]李国藻. 双重方位投影[C]//吴忠性,胡毓钜. 地图投影论文集. 北京:测绘出版社,1983:58 -74.
[11]钟业勋,冯可君. 关于地图投影存在变形的数学分析与几何证明[J]. 地图,1993(2):11 -13.
[12]陆漱芬,陈由基,王近仁,等. 地图学基础[M]. 北京:高等教育出版社,1987:126 -129.
[13]杨启和. 高斯 - 克吕格投影族的研究[C]//吴忠性,胡毓钜. 地图投影论文集. 北京:测绘出版社,1983:158 -172.
[14]钟业勋. 关于用纬度 φ 的高次幂方程表示地图投影经线的若干问题[C]//吴忠性,胡毓钜. 地图投影论文集. 北京:测绘出版社,1983:329 -334.
[15]钟业勋,黄俊华,李占元. 纬度函数反解研究[J]. 测绘科学,2006,31(5):22 -23.
[16]西安交通大学高等数学教研室. 高等数学(下册)[M]. 北京:人民教育出版社,1964:24 -26.
[17]钟业勋. 地图图像系统为布尔代数系的证明[J]. 武汉测绘科技大学学报,1999,24(1):53 -55.
[18]钟业勋. 魏文展. 地图符号系统为布尔代数学系的证明及其应用[J]. 武汉测绘科技大学学报,1999,24(4):355 -357.
[19] 郑红波, 钟业勋, 秦绪佳. 地图图层系统为布尔代数系的证明及应用 [J]. 浙江工业大学学报, 2005, 33(1): 60 -63.
[20] 李占元, 钟业勋, 地图编绘的布尔代数运算原理及制图综合算子数学模型 [J]. 武汉大学学报: 信息科学版, 2005, 30 (5): 431 -434.
[21] 王树禾, 图论及其算法 [M]. 合肥: 中国科技大学出版社, 1990: 5 -9.
[22] 钟业勋, 胡毓钜. 地图概念及其基本特性的逻辑思考 [J]. 测绘工程, 1997, 6 (4): 11 -15.
[23] 钟业勋, 李占元. 地图数学定义的研究 [J]. 武汉测绘科技大学学报, 1997, 22 (2): 132 -135.
[24] 黄鹄, 钟业勋. 点线面地图符号定义的简化与统一 [J]. 测绘科学, 2005, 30 (6): 70 -71.
[25] 钟业勋, 胡毓钜. 地图的集合模型 (表达式) 及比较应用初探 [J]. 武汉测绘科技大学学报, 1990, 15 (1): 1 -6.
[26] 钟业勋,魏文展,彭月英,等. 地图符号数学定义的研究[J]. 武汉大学学报:信息科学版,2001,25(5):465 -467.
[27] 钟业勋. 模拟与虚拟地图符号及地理虚拟空间的数学定义 [J]. 武汉大学学报: 信息科学版, 2005, 30 (6): 557 -559.
[28] 郑红波, 钟业勋, 郑浩. 地图符号分类的逻辑体系 [J]. 测绘信息与工程, 2007, 32 (6): 15 -16.
[29] 钟业勋, 魏文展, 李占元. 基本地貌形态数学定义的研究 [J]. 测绘科学, 2002, 27 (3): 16 -18.
[30] 钟业勋, 胡宝清. 山地与平原数学定义的研究 [J]. 黑龙江工程学院学报, 2009, 23 (3): 26 -28.
[31] 钟业勋, 胡宝清, 朱根雄. 基本地貌形态数学定义的研究 [J]. 桂林工学院学报, 2009, 29 (4): 481 -484.
[32] 章炯民, 陶增乐, 柳银萍, 等. 离散数学 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2009: 77.
[33] 李占元, 李景文, 张卫京, 等. 地理变量量表的数学定义 [J]. 桂林工学院学报, 2005, 25 (1): 62 -65.
[34] 祝国瑞, 徐肇忠. 普通地图制图中的数学方法 [M]. 北京: 测绘出版社, 1990: 66 -67.
[35] 李文林. 数学史概论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 349 -353.
[36] 李后强, 汪富泉. 分形理论及其在分子科学中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1997: 6 -9.
[37] 何宗宜, 阮依香, 严为利, 等. 基于分形理论的水系要素制图综合研究 [J]. 武汉大学学报: 信息科学版, 2002, 27 (4): 427 -431.
[38] 张文修, 王国俊, 刘旺金, 等. 模糊数学引论 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1991: 5 -13.
[39] 钟业勋, 胡毓钜. 圆柱投影, 圆锥投影和方位投影的统一数学模型及应用比较研究 [J]. 地图, 1992, 24 (1): 12 -17.
[40] 钟业勋, 吴忠性, 冯可君. 地图色彩的度量研究 [G]. 中国地图学年鉴 (1993 年卷). 1994: 15 -16.
[41] 祝国瑞, 张根寿. 地图分析 [M]. 北京: 测绘出版社, 1994: 246 -278.
[42] 钟业勋. 数理地图学 [M]. 北京: 测绘出版社, 2007.

Mathematical Application in Cartography

ZHONG Ye-xun[1,2], HU Bao-qing[1], QIAO Jun-jun[3]

(1. a. *Key Laboratory of Beibu Gulf Environmental Evolution and Resources Utilization*, *Ministry of Education*; b. *School of Resources and Environment Science*, *Guangxi Teachers Education University*, *Nanning* 530001, *China*; 2. *Guangxi Regional Bureau of Surveying and Mapping*, *Nanning* 530023, *China*; 3. *School of Geodesy and Geomatics*, *Wuhan University*, *Wuhan* 430079, *China*)

Abstract: This paper introduces the application of cartography for topology and theory of funcions, geometry, algebra, calculus, graph theory, theory of sets, probability theory and mathematical statistics, fractal geometry and fuzzy mathematics. The mathematical cartography application of multi mathematical tools and mathematical method is put forward. The widespread mathematical application in cartography shows that mathematics plays an important role for cartographic development.

Key words: mathematics; topology; algebra; ealculus; theory of sets; cartography; application